Bulletin de la Classe des sciences

Sur la construction d'exemples de surfaces algébriques contenant des involutions cycliques

Lucien Godeaux

Résumé

Construction de surfaces algébriques non rationnelles, contenant des involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis, ceux-ci ayant une structure assignée.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur la construction d'exemples de surfaces algébriques contenant des involutions cycliques,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Construction de surfaces algébriques non rationnelles, contenant des involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis, ceux-ci ayant une structure assignée.

Comme complément à la théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique que nous avons édifiée dans ces dernières années (1), il importait de montrer qu'il existe des involutions ayant des points unis de toutes les structures que nous avons rencontrées. Un premier exemple est fourni par les involutions engendrées par les homographies cycliques non homologiques du plan. Nous en avons donné un second exemple récemment (2) ; la surface support de l'involution n'est pas rationnelle. Nous en donnons ici un nouvel exemple, la surface F contenant l'involution étant l'intersection d'un cône de Veronese de l'espace à six dimensions avec une hypersurface. Nous montrons tout d'abord que la surface n'est pas rationnelle en construisant son système canonique. Nous construisons ensuite une surface

(1) *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités scient., n° 270, Paris, Hermann, 1935) ; *Mémoire sur les surfaces multiples* (MÉMOIRES IN-8° DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1953) ; *Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples ;* Deuxième Colloque de Géométrie algébrique tenu à Liège en 1952 (Liège, Thone et Paris, Masson, 1952, pp. 225-241). Voir aussi le résumé de deux conférences faites à l'Université de Milan : *Sulle involuzioni cicliche appartenenti ad una superficie algebrica* en cours de publication dans les Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano.

(2) *Sur l'existence de surfaces multiples possédant des points de diramation de structure donnée* (Rendiconti di Matematica, di Roma, 1954, pp. 42-47).

F d'ordre $4p$, contenant une involution cyclique d'ordre premier impair, présentant p points unis de structure assignée. Incidemment, nous rencontrons une surface contenant une involution cyclique ayant $2p$ points unis, mais la structure de ceux-ci est déterminée par la construction de la surface. Enfin, nous construisons des involutions dépourvues de points unis.

1. Considérons un espace linéaire S_6 à six dimensions dont les coordonnées ponctuelles projectives homogènes seront désignées par $X_0, X_{11}, X_{22}, \ldots, X_{12}$. Nous désignerons par O_0 le point $(1, 0, 0, \ldots, 0)$ et par ξ l'hyperplan $X_0 = 0$.

Posons

$$X_{11} = x_1^2,\ X_{22} = x_2^2,\ X_{33} = x_3^2,\ X_{23} = x_2x_3,\ X_{31} = x_3x_1,\ X_{12} = x_1x_2.$$

Le lieu du point X de l'hyperplan ξ ayant ces coordonnées est la surface de Veronese Φ d'équations

$$X_{22}X_{33} = X_{23}^2,\ X_{33}X_{11} = X_{31}^2,\ X_{11}X_{22} = X_{12}^2,$$
$$X_{12}X_{31} = X_{11}X_{23},\ X_{23}X_{12} = X_{22}X_{31},\ X_{31}X_{23} = X_{33}X_{12}.$$

Dans S_6, ces équations représentent un cône V_3^4, d'ordre quatre, projection de la surface Φ à partir de O_0.

On peut représenter birationnellement le cône V_3^4 sur un espace S_3 en posant

$$\rho X_{11} = x_1^2,\ \rho X_{22} = x_2^2,\ \ldots,\ \rho X_{12} = x_1x_2,\ \rho X_0 = x_1x_4. \qquad (1)$$

Il y a exception pour les points de la conique

$$X_{11} = X_{31} = X_{12} = X_0 = 0,\ X_{22}X_{33} - X_{23}^2 = 0.$$

A chaque point de cette conique correspond une droite du plan $x_1 = 0$ passant par le point O_4 (0,0,0,1).

Il y a également exception pour le point O_4, auquel correspondent les points de la surface Φ [1].

---

[1] Nous avons déjà utilisé cette représentation dans une note antérieure : *Sur une involution rationnelle douée de trois points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique de genre trois* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1921, pp. 653-665, 694-702).

Considérons maintenant une variété V_5^n, ne passant pas par O_0, d'équation

$$X_0^n\varphi_0 + X_0^{n-1}\varphi_1(X_{11}, X_{22}, \ldots, X_{12}) + \ldots + \varphi_{11}(X_{11}, X_{22}, \ldots X_{12}) = 0,$$

où les φ représentent des formes algébriques en X_{11}, X_{22}, ..., X_{12} dont le degré est indiqué par l'indice.

La variété V_5^n découpe sur le cône V_3^4 une surface F d'ordre $4n$. Les cônes projetant de O_0 les coniques de la surface de Veronese Φ découpent sur F des courbes C, d'ordre $2n$, formant un réseau $|C|$ de degré n. Le système des sections hyperplanes de F est le système complet $|2C|$.

2. Par les équations (1), la surface F a pour homologue dans S_3 la surface F' d'équation

$$x_1^n x_4^n \varphi_0 + x_1^{n-1} x_4^{n-1} \varphi_1(x_1^2,\ x_2^2, \ldots, x_1x_2) + \ldots + \varphi_n(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_1x_2) = 0.$$

dont l'ordre est $2n$.

La surface F' possède en O_4 un point multiple d'ordre n, uniplanaire, le cône tangent à la surface en ce point se réduisant au plan $x_1 = 0$ compté n fois.

Aux courbes C correspondent sur la surface F' les sections de cette surface par les plans passant par O_4. Nous continuerons à désigner ces courbes par C.

Pour analyser la singularité de F' au point O_4, effectuons la transformation quadratique.

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1y_4 : y_2y_4 : y_3y_4 : y_2y_3.$$

qui fait correspondre au domaine du point O_4 le plan $y_4 = 0$, à la surface F' correspond la surface F'' d'équation

$$(y_1y_2y_3)^n\varphi_0 + (y_1y_2y_3)^{n-1}y_4\varphi_1(y_1^2, y_2^2, \ldots, y_1y_2) + \ldots +$$
$$y_4^n\varphi_n(y_1^2, y_2^2, \ldots, y_1y_2) = 0.$$

La surface F'' est d'ordre $3n$, passe $2n$ fois par le point O_4' (0,0,0,1) et n fois par chacune des droites $y_1 = y_4 = 0$, $y_2 = y_4 = 0$, $y_3 = y_4 = 0$, ces deux dernières étant fondamentales pour la transformation. On en conclut que la surface F' possède une droite multiple d'ordre n, infiniment voisine de O_4, dans le plan tangent $x_1 = 0$.

On en conclut que les courbes C ont le genre $(n - 1)^2$.

Les adjointes d'ordre $3n - 4$ à la surface F'' passent $2n - 2$ fois par le point O'_4 et $n - 1$ fois par chacune des trois droites multiples de la surface. Elles comprennent donc comme parties fixes les faces du tétraèdre de référence et sont complétées par des surfaces d'ordre $3n - 8$ passant $2n - 5$ fois par le point O'_4 et $n - 3$ fois par les droites $y_1 = y_4 = 0$, $y_2 = y_4 = 0$, $y_3 = y_4 = 0$. A ces surfaces d'ordre $3n - 8$ correspondent dans S_3 les adjointes d'ordre $2n - 5$ à la surface F'. Ces adjointes ont la multiplicité $n - 2$ en O_4 et passent $n - 3$ fois par la droite infiniment voisine de O_4, dans le plan $x_1 = 0$, multiple d'ordre n pour la surface F'. Les adjointes d'ordre $2n - 4$ à F' contiennent donc le plan fixe $x_1 = 0$ et sont complétées par les surfaces d'ordre $2n - 5$ qui viennent d'être obtenues.

Parmi les surfaces d'ordre $2n - 5$ adjointes à $F|$ se trouvent les cônes d'ordre $2n - 5$ de sommet O_4. On en conclut que le système canonique de F' et par conséquent celui de F est

$$|(2n - 5)C|.$$

C'est un résultat que nous avions déjà obtenu, dans un cas plus général, par une autre méthode (1).

3. Considérons dans le plan σ dont les coordonnées ponctuelles sont x_1, x_2, x_3, l'homographie H de période p,

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \epsilon x_2 : \epsilon^a x_3 . \tag{2}$$

où p est un nombre premier impair, ϵ une racine primitive d'ordre p de l'unité et a un entier compris entre 1 et p. Cette homographie possède trois points unis : les sommets du triangle de référence.

Prenons une courbe d'ordre $2p$, transformée en elle-même par l'homographie (2) et ne passant pas par les sommets du triangle de référence. L'équation de cette courbe peut s'écrire sous la forme

$$\varphi_p(x_1^2,\ x_2^2,\ x_3^2,\ x_2x_3,\ x_3x_1,\ x_1x_2) = 0.$$

(1) *Sopra alcune superficie algebriche dell'iperspazio* (ANNALI DELLA UNIVERSITÀ DI FERRARA, 1950, pp. 3-8).

Cela étant, considérons la surface F découpée sur V_3^p par l'hypersurface

$$X_0^p\varphi_0 + \varphi_p(X_{11}, X_{22}, \ldots, X_{12}) = 0.$$

Elle est transformée en soi par l'homographie H, de période p, d'équations

$$\left.\begin{aligned} \rho X'_{11} = X_{11},\ \ \rho X'_{22} = \epsilon^2 X_{22},\ \ \rho X'_{33} = \epsilon^{2\alpha} X_{33}, \\ \rho X'_{23} = \epsilon^{\alpha+1} X_{23},\ \ \rho X'_{31} = \epsilon^{\alpha} X_{31},\ \ \rho X'_{12} = \epsilon X_{12}, \\ \rho X'_0 = X_0, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

où l'on remplace éventuellement 2α par le reste de sa division par p.

L'homographie H détermine sur F une involution I n'ayant qu'un nombre fini de points unis.

Supposons tout d'abord que 2, 2α, $\alpha + 1$, α, 1 ne soient pas congrus par rapport au module p et qu'aucun d'eux ne soit multiple de p. Désignons dans l'espace ξ ($X_0 = 0$) par O_{ij} le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf X_{ij}. L'homographie H a comme axes ponctuels les points O_{22}, O_{33}, O_{23}, O_{31}, O_{12} et la droite O_0O_{11}. Cette droite rencontre la surface F en p points $A_1, A_2, \ldots, A_p$, qui sont les seuls points unis de l'involution I.

Le plan tangent à la surface F en un de ces points A_i est le plan $A_iO_{31}O_{12}$, par conséquent ce point uni a la même structure que le point uni (1, 0, 0) de l'involution engendrée dans le plan σ par l'homographie (2).

Laissons tomber l'hypothèse qui vient d'être faite sur α et observons que les points de rencontre de F avec la droite O_0O_{11} sont toujours des points unis de l'involution I. D'autre part, les autres points unis de l'involution I sont nécessairement situés sur l'une des droites O_0O_{22}, O_0O_{33}. Mais pour cela, il faudrait qu'une de ces droites soit un axe de l'homographie H, ce qui entraînerait soit $\epsilon^2 = 1$, soit $\epsilon^{2\alpha} = 1$. Le premier cas ne peut se présenter puisque par hypothèse $p > 2$.

Pour examiner le second cas, posons $p = 2\nu + 1$. On doit alors avoir $\alpha = \nu + 1$. Alors, le plan $O_0\ O_{11}\ O_{33}$ est un axe de l'homographie H. Ce plan ne rencontre F qu'en des points situés sur les droites O_0O_{11}, O_0O_{33} et l'involution I possède $2p$ points unis.

Les équations de l'homographie (2) peuvent s'écrire

$$x_1' : x_2' : x_3' = \epsilon^{p-1}x_1 : \epsilon x_2 : x_3.$$

Les points unis $B_1, B_2, \ldots, B_p$ de I, situés sur la droite O_0O_{33}, ont la même structure que le point (0, 0, 1) uni pour l'involution engendrée dans le plan σ par l'homographie (2). C'est ce que nous avons appelé des points unis symétriques.

4. On peut également construire sur F une involution cyclique d'ordre p dépourvue de points unis.

Dans les équations (3) de l'homographie H, remplaçons la dernière équation par

$$\rho X_0' = \epsilon^\gamma X_0, \qquad (0 \leqslant \gamma < p).$$

Nous allons déterminer γ de telle sorte que les axes ponctuels de l'homographie H soient les sommets $O_0, O_{11}, O_{22}, \ldots, O_{12}$ de la pyramide de référence.

Pour que la droite O_0O_{11} ne soit plus un axe de H, il suffit de supposer $\gamma > 0$.

Multiplions les seconds membres des équations (3) par ϵ^{p-2}. On obtient

$$\rho X_{11}' = \epsilon^{p-2}X_{11}, \ \rho X_{22}' = X_{22}, \ \rho X_{33}' = \epsilon^{2\alpha-2}X_{33},$$
$$\rho X_{23}' = \epsilon^{\alpha-1}X_{23}, \ \rho X_{31}' = \epsilon^{\alpha-2}X_{31}, \ \rho X_{12}' = \epsilon^{p-1}X_{12},$$
$$\rho X_0' = \epsilon^{\gamma-2}X_0.$$

Pour que la droite O_0O_{22} ne soit pas un axe de l'homographie H, il suffit de prendre $\gamma \neq 2$.

Multiplions maintenant les seconds membres des équations (3) par $\epsilon^{p-2\alpha}$ (ou par $\epsilon^{2p-2\alpha}$ si $2\alpha > p$) ; on obtient

$$\rho X_{11}' = \epsilon^{p-2\alpha}X_{11}, \ \rho X_{22}' = \epsilon^{p-2\alpha+2}X_{22}, \ \rho X_{33}' = X_{33},$$
$$\rho X_{23}' = \epsilon^{p-\alpha+1}X_{23}, \ \rho X_{31}' = \epsilon^{p-\alpha}X_{31}, \ \rho X_{12}' = \epsilon^{p-2\alpha+1}X_{12},$$
$$\rho X_0' = \epsilon^{p-2\alpha+\gamma}X_0.$$

Pour que la droite O_0O_{11} ne soit pas un axe ponctuel de H, il suffit que $p - 2\alpha + \gamma$ ne soit pas multiple de p.

Dans ces conditions :

$$\gamma > 0, \gamma \neq 2, \quad \gamma - 2\alpha \neq \mathcal{M}p,$$

l'involution I est privée de points unis.

Liège, le 11 juillet 1955.