Bulletin de la Classe des sciences

Sur la structure de certains points de diramation d'une surface multiple d'ordre 37

Lucien Godeaux

Résumé
Détermination de la structure de certains points de diramation d'une surface multiple d'ordre 37, en application des méthodes générales indiquées par l'auteur dans un Mémoire récent.

Sur la structure de certains points de diramation d'une surface multiple d'ordre 37,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Détermination de la structure de certains points de diramation d'une surface multiple d'ordre 37, en application des méthodes générales indiquées par l'auteur dans un Mémoire récent.

Nous avons exposé une méthode générale pour déterminer la structure des points de diramation d'une surface multiple d'ordre premier p (1). Cette méthode est en général d'application facile, cependant, dans certains cas, quelques difficultés peuvent se présenter. C'est à deux cas de cette nature qu'est consacrée la présente note.

Un point de diramation d'une surface multiple d'ordre premier p, isolé, est caractérisé par deux entiers positifs α, β, tels que $\alpha\beta - 1$ soit divisible par p. Actuellement, nous avons $p = 37$ et le premier cas considéré correspond à $\alpha = 24$, $\beta = 17$. Le point de diramation correspondant est multiple d'ordre quatre pour la surface multiple ; il est équivalent à un ensemble de sept courbes rationnelles.

Le second point considéré est caractérisé par les nombres $\alpha = 21$, $\beta = 30$. Ce point est quintuple pour la surface multiple et équivalent à un ensemble de six courbes rationnelles.

Nous montrons pour terminer que ces points de diramation peuvent exister sur une même surface multiple d'ordre 37 et précisément sur la surface qui représente l'involution engendrée

(1) *Mémoire sur les surfaces multiples* (Mémoires in-8° de l'Acad. roy. de Belgique, 1952) ; *Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples* (Colloque de géométrie algébrique du C. B. R. M. tenu à Liège en 1953, pp. 225-241 ; Liège, Thone et Paris, Masson, 1952).

dans un plan par une homographie cyclique de période 37. Il y a alors, sur la surface multiple, trois points de diramation dont deux sont du type qui vient d'être étudié. Le troisième est un point multiple d'ordre sept pour la surface et est équivalent à trois courbes rationnelles.

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I d'ordre 37. Nous prendrons comme modèle projectif de F une surface normale sur laquelle l'involution I est déterminée par une homographie de période 37 de l'espace ambiant, cette homographie possédant 37 axes ponctuels. Nous supposerons que I ne possède qu'un nombre fini de points unis, tous situés sur un des axes de l'homographie. Dans le système des sections hyperplanes $|C|$ de F, il existe un système linéaire partiel $|C_0|$, dépourvu de points-base, composé au moyen de I. Nous désignerons par Φ une surface normale image de l'involution I, dont les sections hyperplanes Γ_0 correspondent aux courbes C_0. Sur Φ, les points de diramation sont donc isolés.

Nous désignerons par C_0' les courbes C_0 passant par un point uni A, de seconde espèce, par C_0'' les courbes C_0' assujetties à toucher en A une droite non unie pour l'homographie engendrant I, et ainsi de suite. Les courbes qui correspondent sur Φ aux courbes C_0', C_0'', ... seront désignées par Γ_0', Γ_0'', ... Enfin, nous désignerons par Φ_1, Φ_2, ... les surfaces normales ayant pour sections hyperplanes respectivement les courbes Γ_0', Γ_0'', ... Φ_1 est projectivement équivalente à la projection de Φ à partir du point de diramation A' homologue de A sur un hyperplan de l'espace ambiant, Φ_2 est projectivement équivalente à une projection de Φ_1 à partir d'un de ses points...

A un point uni A sont attachés deux entiers positifs α, β tels que $\alpha\beta - 1$ soit divisible par 37. On considère les solutions en nombres entiers positifs des congruences (équivalentes)

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \quad \mu + \beta\lambda \equiv 0, \quad (\text{mod. } 37) \tag{1}$$

telles que $\lambda + \mu < p$ et on les range par ordres croissants des sommes $\lambda + \mu$. Les courbes $C_0^{(i)}$ ont en A la multiplicité $\lambda_i + \mu_i$, λ_i tangentes coïncidant avec une direction unie de I issue de A et μ_i avec l'autre direction unie de I issue de A. Les courbes $C_0^{(19)}$ ont en A un point multiple d'ordre 37 à tangentes variables.

2. Ces faits rappelés, considérons un point uni de seconde espèce A auquel sont attachés les nombres $\alpha = 24$, $\beta = 17$. Les solutions des congruences (1) sont actuellement

$$\lambda_1 = 2,\ \mu_1 = 3;\quad \lambda_2 = 4,\ \mu_2 = 6;\quad \lambda_3 = 13,\ \mu_3 = 1;\quad \lambda_4 = 6,\ \mu_4 = 8;\ \lambda_5 = 15,\ \mu_5 = 4;\ \lambda_6 = 8,\ \mu_6 = 12;\ \lambda_7 = 1,\ \mu_7 = 20;\ \lambda_8 = 17, \mu_8 = 7;\ \lambda_9 = 10, \mu_9 = 15;\ \lambda_{10} = 3, \mu_{10} = 23;\ \lambda_{11} = 25,\ \mu_{11} = 2;\ \ldots$$

Les courbes C_0' ont en A la multiplicité cinq, deux tangentes coïncidant avec une direction unie, trois avec l'autre. Le comportement des courbes C_0' en A est fixée par le schéma suivant :

$$\begin{array}{lll}
 & & A^5,\ (\beta, 1)^2, \ldots, (\beta, 16)^2. \\
 & (\alpha, 1)^3, & \\
 & \vdots & \\
 & (\alpha, 4)^3, & \\
(\alpha, 5, 1)^1, & (\alpha, 5)^2, & \\
 & (\alpha, 6)^1, & \\
 & \vdots & \\
 & (\alpha, 23)^1. &
\end{array}$$

Le point de diramation A′ est quadruple pour la surface Φ et, en passant à la surface Φ_1, le domaine de A′ est équivalent à une droite σ_α qui représente le domaine du point uni de première espèce $(\alpha, 23)$, à une droite τ_α représentant le domaine du point $(\alpha, 5, 1)$, droite rencontrant σ_α en un point, à une conique σ_β représentant le domaine du point $(\beta, 16)$ et rencontrant τ_α en un point A_1'.

Les courbes C_0'' ont en A la multiplicité 10 et par conséquent ne peuvent plus passer qu'une fois par le point $(\beta, 16)$. Elles ne peuvent plus passer par le point $(\alpha, 5, 1)$ et par conséquent, on passe de Φ_1 à Φ_2 en projetant la première de ces surfaces du point A_1'. Le comportement des courbes C_0'' au point A est caractérisé par le schéma suivant :

$$\begin{array}{lll}
 & A^{10},\ (\beta, 1)^4, \ldots, (\beta, 3)^4, (\beta, 4)^3, (\beta, 5)^1, \ldots, (\beta, 16)^1. & \\
(\alpha, 1, 1)^1,\ (\alpha, 1)^5, & (\beta, 4, 1)^1, \ldots, (\beta, 4, 1, 2)^1. & \\
(\alpha, 1, 1, 1)^1,\ (\alpha, 2)^1, & & \\
\vdots \qquad\quad \vdots & & \\
(\alpha, 1, 1, 3)^1\ (\alpha, 23)^1. & &
\end{array}$$

Sur la surface Φ_2, au point $(\alpha, 23)$ correspond la droite τ_α, au point $(\alpha, 11, 3)$ correspond une droite ρ_{11}, au point $(\beta, 1, 1, 2)$ correspond une droite ρ_{12}, au point $(\beta, 16)$ correspond une droite σ_β. Le point A_1' est double biplanaire pour Φ_1.

La droite ρ_{11} rencontre σ_α en un point qui représente τ_α, les droites ρ_{11} et ρ_{12} se rencontrent en un point A_2' et les droites ρ_{12}, σ_β se rencontrent en un point.

3. Les courbes C_0''' ont en A la multiplicité 14 et, puisque $\mu_3 = 1$, passent simplement par les points $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, 23)$. Elles passent simplement par le point $(\beta, 16)$ et par conséquent ne peuvent plus passer par les points $(\alpha, 1, 1, 3)$ et $(\beta, 4, 1, 2)$. On passe donc de la surface Φ_2 à la surface Φ_3 en projetant la première du point A_2'.

Le point A_2' peut être simple ou double conique ou double biplanaire pour la surface Φ_2. Supposons que l'un des deux premiers cas se présente. On trouve alors que les courbes C_0''' passent huit fois par $(\beta, 1)$, une fois par les points $(\beta, 2), \ldots, (\beta, 16)$, cinq fois par le point $(\beta, 1, 1)$, deux fois par les points $(\beta, 1, 1, 1)$, $(\beta, 1, 1, 1, 1)$ et une fois par les points $(\beta, 1, 1, 1, 2)$, $(\beta, 1, 1, 1, 2, 1)$. Dans ces conditions, le nombre des intersections de deux courbes C_0''' absorbé en A serait égal à 9×37 et si n est l'ordre de la surface Φ, la surface Φ_3 serait d'ordre $n - 9$. Or, Φ_1 est d'ordre $n - 4$, Φ_2 d'ordre $n - 6$ et, puisque les courbes C_0''' passent simplement par $(\beta, 1, 1, 1, 2, 1)$, A_2' est simple pour Φ_2. La surface Φ_3 devrait donc être d'ordre $n - 7$. La contradiction à laquelle nous parvenons montre que A_2' doit être double biplanaire pour Φ_2.

Le point A_2' est donc équivalent à deux droites ρ_{21}, ρ_{22} se coupant en un point, la première rencontrant ρ_{11} en un point, la seconde rencontrant ρ_{12} en un point. Sur la surface Φ_3, nous aurons donc une droite σ_α représentant le domaine du point $(\alpha, 23)$, une droite ρ_{21} rencontrant τ_α en un point A_3' représentant les courbes τ_α, ρ_{11}, une droite ρ_{22} rencontrant ρ_{21} et ensuite σ_β en un point représentant ρ_{12}.

Les courbes $C_0^{(4)}$ passent 15 fois par A et ne peuvent plus passer par $(\alpha, 23)$. Elles ne peuvent plus passer par l'un des points représentant les droites ρ_{21}, ρ_{22} et précisément ici par le premier de ces points. On passe donc de Φ_3 à Φ_4 en projetant la première de A_3'. Observons que ce point représente τ_a et ρ_1, donc les courbes $C_0^{(4)}$ passeront par les points $(\alpha, 5, 1)$ et $(\alpha, 1, 1, 3)$. Effectivement, on trouve que le comportement des courbes $C_0^{(4)}$ en A est fixé par le schéma

$$\begin{array}{lll} & A^{15}, (\beta, 1)^6, (\beta, 2)^2, (\beta, 3)^1, \ldots, (\beta, 16)^1. \\ (\alpha, 1, 1)^1, (\alpha, 1)^8, & (\beta, 2, 1)^1, \\ (\alpha, 1, 1, 1)^1, (\alpha, 2)^4, & \vdots \\ (\alpha, 1, 1, 2)^1, & \vdots \\ (\alpha, 1, 1, 3)^1, (\alpha, 3)^4, & (\beta, 2, 4)_1. \\ (\alpha, 4)^4, & \\ (\alpha, 5, 1)^2, (\alpha, 5)^2, & \end{array}$$

Il est alors facile de voir que le comportement des courbes C_0''' en A est fixé par le schéma

$$\begin{array}{llll} A^{14}, & (\beta, 1)^7, & (\beta, 2)^2, & (\beta, 3)^1, \ldots, (\beta, 16)^1. \\ (\alpha, 1)^1, & (\beta, 1, 1)^1, & (\beta, 2, 1)^1, & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ (\alpha, 23)^1, & (\beta, 1, 6)^1, & (\beta, 2, 4)^1. & \end{array}$$

Sur la surface Φ_3, qui est d'ordre $n - 8$, au domaine du point $(\beta, 1, 6)$ correspond la droite ρ_{21} et au domaine du point $(\beta, 2, 4)$ la droite ρ_{22}

Sur la surface Φ_4, nous avons une conique τ_a correspondant au point $(\alpha, 5, 1)$ et dont un point représente σ_a, une droite ρ_1 représentant le point $(\alpha, 1, 1, 3)$, une droite ρ_{22} représentant le point $(\beta, 2, 4)$ et rencontrant ρ_{11} en un point qui représente ρ_{21}, une droite σ_β rencontrant ρ_{22} en un point qui représente ρ_{12}. La surface Φ_4 est d'ordre $n - 11$.

4. Les courbes $C_0^{(5)}$ passent 19 fois par A. L'étude de leur comportement en ce point se fait sans difficulté et nous nous bornerons à indiquer la multiplicité des points de première espèce. Les courbes $C_0^{(5)}$ passant deux fois par le point $(\alpha, 5, 1)$, deux fois par le point $(\beta, 1, 6)$ et une fois par le point $(\beta, 16)$.

Sur la surface Φ_5, projection de Φ_4 à partir du point A'_4 commun aux droites ρ_{11} et ρ_{22}, nous avons une conique τ_a, une conique ρ_{21} rencontrant τ_a en un point A'_5 qui représente ρ_{11}, une droite σ_β coupant ρ_{21} en un point qui représente ρ_{12} et ρ_{22}. La surface Φ_5 est d'ordre $n - 13$.

Les courbes $C_0^{(6)}$ passent 20 fois par A, une fois par $(\alpha, 5, 1)$, deux fois par $(\alpha, 1, 1, 3)$, une fois par $(\beta, 1, 6)$ et une fois par $(\beta, 16)$.

La surface Φ_6, d'ordre $n - 15$, est la projection de Φ_5 à partir de A'_5. Elle contient une droite τ_a, une conique ρ_{11} coupant τ_a en un point, une droite ρ_{21} coupant ρ_{11} en un point, une droite σ_β coupant ρ_{21} en un point qui représente les courbes ρ_{12} et ρ_{22}.

Les courbes $C_0^{(7)}$ passent 21 fois par A et une fois par les points $(\beta, 1), \ldots, (\beta, 16)$. Elles passent en outre une fois par $(\alpha, 5, 1)$, une fois par $(\alpha, 1, 1, 3)$ et une fois par un point $(\alpha, 1, 4, 2)$.

Sur la surface Φ_7, d'ordre $n - 16$, projection de Φ_6 à partir du point A'_6 commun à ρ_{11} et à ρ_{21}, on a une droite τ_a, une droite ρ_{11} s'appuyant sur τ_a, une droite exceptionnelle ρ', représentant le domaine du point $(\alpha, 1, 4, 2)$ et rencontrant ρ_{11}, une droite σ_β rencontrant ρ' en un point A'_7 qui représente $\rho_{12}, \rho_{21}, \rho_{22}$.

5. Avant d'aller plus loin, observons que l'on a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma'_0 + \sigma_a + \tau_a + \rho_{11} + \rho_{21} + \rho_{22} + \rho_{12} + \sigma_\beta.$$

On en conclut que τ_a et σ_β ont le degré virtuel -3, $\sigma_a, \rho_{11}, \rho_{21}, \rho_{22}, \rho_{12}$ le degré virtuel -2. De plus, chacune des courbes $\sigma_a, \tau_a, \ldots, \sigma_\beta$ rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres.

On a ensuite

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &\equiv \Gamma''_0 + \sigma_a + \tau_a + 2(\rho_{11} + \rho_{21} + \rho_{22} + \rho_{12}) + \sigma_\beta,\\
\Gamma_0 &\equiv \Gamma'''_0 + \sigma_a + \tau_a + 2\rho_{11} + 3(\rho_{21} + \rho_{22}) + 2\rho_{12} + \sigma_\beta,\\
\Gamma_0 &\equiv \Gamma_0^{(4)} + \sigma_a + 2\tau_a + 3\rho_{11} + 3\rho_{21} + 3\rho_{22} + 2\rho_{12} + \sigma_\beta,\\
\Gamma_0 &\equiv \Gamma_0^{(5)} + \sigma_a + 2\tau_a + 3\rho_{11} + 4\rho_{21} + 3\rho_{22} + 2\rho_{12} + \sigma_\beta,\\
\Gamma_0 &\equiv \Gamma_0^{(6)} + \sigma_a + 2\tau_a + 4\rho_{11} + 4\rho_{21} + 3\rho_{22} + 2\rho_{12} + \sigma_\beta.
\end{aligned}$$

Les courbes $\Gamma_0^{(7)}$ sont des courbes $\Gamma_0^{(6)}$ passant par un point simple de Φ_6.

Cela étant, observons que les courbes $C_0^{(8)}$ ont la multiplicité 24 en A. Elles ne peuvent plus passer par le point (β, 16) ni par le point (α, 1, 4, 2). Il en résulte que la surface Φ_8 est la projection de Φ_7 à partir du point A'_7. Ce point représentant les courbes $\rho_{12}, \rho_{22}, \rho_{21}$, on a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(8)} + \sigma_a + 2\tau_a + 4\rho_{11} + 5\rho_{21} + 4\rho_{22} + 3\rho_{21} + \sigma_\beta.$$

On en conclut que les courbes $C_0^{(8)}$ doivent passer deux fois par le point (β, 1, 6), une fois par le point (β, 4, 1, 1). Elles passent en outre une fois par les points (α, 5, 1) et (α, 1, 1, 3).

Sur la surface Φ_8, d'ordre n — 19, on a une droite τ_a, une droite ρ_{11} coupant τ_a en un point, une conique ρ_{21} coupant ρ_1 en un point A'_8, une droite ρ_{12} coupant ρ_{21} en un point qui représente ρ_{22}.

6. L'étude de la structure du point A′ se poursuit alors sans difficulté. Nous nous bornerons aux indications suivantes :

La surface Φ_9, d'ordre n — 20, est la projection de la surface Φ_8 à partir du point A'_8, simple pour Φ_8. Elle contient une droite τ_a, une droite exceptionnelle ρ' coupant τ_a en un point, une droite ρ_{21} coupant ρ' en un point A'_9 et une droite ρ_{12} coupant ρ_{21} en un point qui représente ρ_{22}.

La surface Φ_{10}, d'ordre n — 21, est la projection de la surface Φ_9 à partir du point A'_9, simple pour la surface. Elle contient une droite τ_a, une droite exceptionnelle ρ_{11}, représentant le domaine du point (α, 1, 10, 1), coupant τ_a en un point qui représente ρ_1, une droite ρ_{12} coupant ρ_{11} en un point A'_{10} qui représente ρ_{21} et ρ_{22}.

La surface Φ_{11}, d'ordre n — 25, est la projection de Φ_{10} à partir de A'_{10}. Elle contient une droite τ_a, une cubique gauche ρ_{21} coupant τ_a en un point, une droite ρ_{22} coupant ρ_{21} en un point.

On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(11)} + \sigma_a + 2\tau_a + 4\rho_{11} + 6\rho_{21} + 5\rho_{22} + 3\rho_{12} + \sigma_\beta .$$

Et ainsi de suite.

En un point de diramation A′, correspondant aux nombres $\alpha = 24$, $\beta = 17$, *la surface* Φ, *multiple d'ordre* 37, *possède la multiplicité quatre. Le cône tangent est formé de deux plans* (σ_a),

(τ_α) *et d'un cône du second ordre* (σ_β), *le plan* (τ_α) *rencontrant* (σ_α) *et* (σ_β) *suivant une droite, mais* (σ_α) *et* (σ_β) *ne se rencontrent pas en dehors de* A'. *A ce point sont infiniment voisins successifs deux points doubles biplanaires dont le premier est situé sur la droite commune à* (τ_α), (σ_β).

7. Nous supposerons maintenant que A est un point qui correspond à $\alpha = 21$, $\beta = 30$, en conservant les mêmes notations.

Les solutions des congruences

$$\lambda + 26\mu \equiv 0, \qquad \mu + 30\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 37)$$

sont

$\lambda_1 = 1,\ \mu_1 = 7\ ;\ \lambda_2 = 6,\ \mu_2 = 5\ ;\ \lambda_3 = 11,\ \mu_3 = 3\ ;\ \lambda_4 = 2,$
$\mu_4 = 14\ ;\lambda_5 = 16, \mu_5 = 1\ ;\lambda_6 = 7, \mu_6 = 12\ ;\lambda_7 = 12, \mu_7 = 10\ ;\ \ldots$

Les courbes C_0' passent huit fois par A, une fois par les points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, 29)$, sept fois par le point $(\alpha, 1)$, quatre fois par le point $(\alpha, 2)$, une fois par les points $(\alpha, 3)$, $(\alpha, 4)$, ..., $(\alpha, 20)$, trois fois par le point $(\alpha, 2, 1)$.

Sur la surface Φ_1, le domaine du point de diramation A' de la surface Φ est représenté par une droite σ_α représentant le domaine du point $(\alpha, 20)$, une cubique gauche τ_α représentant le domaine du point $(\alpha, 2, 1)$ et une droite σ_β représentant le domaine du point $(\beta, 29)$. La courbe τ_α remonte σ_α en un point et σ_β en un point A_1. La surface Φ_1 est d'ordre $n - 5$, n étant l'ordre de Φ.

Les courbes C_0'' ont la multiplicité 11 en A ; elles ne peuvent plus passer par le point $(\beta, 29)$ et ne peuvent plus passer que deux fois par le point $(\alpha, 2, 1)$. Il en résulte que la surface Φ_2 est la projection de Φ_1 à partir du point A_1'.

Le point A_1' peut être simple, ou double conique ou double biplanaire pour la surface Φ_1. Supposons que l'un des premiers cas se présente ; alors on trouve que les courbes C_0'' passent cinq fois par $(\alpha, 1)$, trois fois par $(\alpha, 2)$, une fois par $(\alpha, 3)$, ..., $(\alpha, 20)$, deux fois par $(\alpha, 2, 1)$, six fois par les points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, $(\beta, 3)$, $(\beta, 4)$, deux fois par les points $(\beta, 5)$, $(\beta, 5, 1)$, $(\beta, 5, 2)$. Le point A_1' serait donc double conique pour Φ_1. Mais alors, l'ordre de Φ_2 serait égal à $n - 7$, alors que le point A absorbe 9×37 points d'intersection de deux courbes C_0''. Cette contradiction montre que A_1' est double biplanaire pour Φ_1.

Sur la surface Φ_2 nous avons donc une droite σ_α, une conique τ_α coupant σ_α en un point, une droite ρ_1 coupant τ_α en un point, une droite ρ_2 coupant ρ_1 en un point et la droite σ_β est représentée par un point de ρ_2.

8. Pour déterminer les points de F, du domaine du point A, dont les domaines sont représentés par les droites ρ_1, ρ_2, il est nécessaire d'examiner les courbes C_0''' et $C_0^{(4)}$.

Les courbes C_0''' passent 14 fois par A et ne peuvent plus passer qu'une fois par le point $(\alpha, 2, 1)$. De plus, elles ne peuvent plus passer par les deux points aux domaines desquels correspondent les droites ρ_1, ρ_2, donc la surface Φ_3 est la projection de Φ_2 à partir du point A_2' commun à τ_α et ρ_1. Sur la surface Φ_3 se trouvent tracées une droite σ_α, une droite τ_α, une droite ρ_2 et une courbe ou un ensemble de courbes qui représente le domaine du point A_2'.

Les courbes $C_0^{(4)}$ ont en A la multiplicité 16 et ne peuvent plus passer par le point $(\alpha, 2, 1)$. On en conclut que les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ sont découpées sur Φ_2 par les hyperplans touchant en A_2' la conique τ_α. Par conséquent, sur la surface Φ_4, il existe une droite ρ_2.

Les courbes $C_0^{(4)}$ passent deux fois par $(\alpha, 1)$, une fois par $(\alpha, 2), \ldots, (\alpha, 20)$, une fois par une suite de points $(\alpha, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 2)$, $\ldots$, $(\alpha, 1, 12)$, deux fois par les points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, $\ldots$, $(\beta, 10)$, une fois par les points $(\beta, 11)$, $(\beta, 11, 1)$.

Sur la surface Φ_4, d'ordre $n - 9$, il correspond au domaine du point $(\alpha, 20)$ une droite σ_α, au domaine du point $(\alpha, 1, 12)$, une droite ρ'' (exceptionnelle car Φ_3 est nécessairement d'ordre $n - 8$), au domaine du point $(\beta, 11, 1)$, une droite ρ_2.

Remontons aux courbes C_0'''. Elles passent 14 fois par A, trois fois par $(\alpha, 1)$, deux fois par $(\alpha, 2)$, une fois par $(\alpha, 3), \ldots, (\alpha, 20)$, une fois par $(\alpha, 2, 1)$, quatre fois par $(\beta, 1)$, deux fois par $(\beta, 2), \ldots, (\beta, 10)$, une fois par $(\beta, 11)$, $(\beta, 11, 1)$, deux fois par $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 2)$, $(\beta, 1, 3)$, une fois par $(\beta, 1, 4)$, $(\beta, 1, 4, 1)$.

Sur la surface Φ_3, d'ordre $n - 8$, on retrouve la droite σ_α, une droite τ_α, une droite exceptionnelle ρ', correspondant au domaine du point $(\beta, 1, 4, 1)$, enfin la droite ρ_2, correspondant au domaine de $(\beta, 11, 1)$. La droite ρ' rencontre τ_α en un point A'_3 et ρ_2 en un point qui représente ρ_1. La surface Φ_4 est la projection de Φ_3 à partir de A'_3.

Les courbes C''_0 passent cinq fois par $(\alpha, 1)$, trois fois par $(\alpha, 2)$, une fois par $(\alpha, 3), \ldots, (\alpha, 20)$, deux fois par $(\alpha, 2, 1)$, six fois par $(\beta, 1)$, trois fois par $(\beta, 2)$, deux fois par $(\beta, 3), \ldots, (\beta, 10)$, une fois par $(\beta, 11)$, $(\beta, 11, 1)$, une fois par $(\beta, 2, 1)$, $(\beta, 2, 2)$ et $(\beta, 2, 3)$.

Sur la surface Φ_2, d'ordre $n - 7$, on a une droite σ_α, une conique τ_α, une droite ρ_1 représentant le domaine du point $(\beta, 2, 3)$, une droite ρ_2 représentant le domaine du point $(\beta, 11, 1)$.

9. Les courbes $C_0^{(5)}$ passent 17 fois par le point A et une fois par les points $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \ldots, (\alpha, 20)$. Elles ne peuvent plus passer par le point $(\beta, 11, 1)$, ni par le point $(\alpha, 1, 12)$. Par conséquent, la surface Φ_5 est la projection de Φ_4 à partir du point A'_4 commun aux droites ρ_2 et ρ''. Or, ce point représente les droites ρ' et ρ_1, donc les courbes $C_0^{(5)}$ doivent passer par les points $(\beta, 1, 4, 1)$ et $(\beta, 2, 3)$. On trouve ainsi que les courbes $C^{(5)}$ passent neuf fois par $(\beta, 1)$, quatre fois par $(\beta, 2)$, trois fois par $(\beta, 3)$, $(\beta, 4)$, une fois par $(\beta, 5)$, deux fois par $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 2)$, $(\beta, 1, 3)$, une fois par $(\beta, 1, 4)$, $(\beta, 1, 4, 1)$, une fois par $(\beta, 2, 1)$, $(\beta, 2, 2)$, $(\beta, 2, 3)$ et une fois par $(\beta, 5, 1)$ et $(\beta, 5, 2)$.

Sur la surface Φ_5, nous avons une droite σ_α, une droite exceptionnelle ρ' qui coupe σ_α en un point qui représente τ_α, une droite ρ_1 qui correspond au point $(\beta, 2, 3)$ et une droite ρ_0 qui représente le domaine du point $(\beta, 5, 2)$. La surface Φ_5 est d'ordre $n - 12$.

La droite ρ_0 ne peut être une droite exceptionnelle et si l'on se reporte à la surface Φ_1, le point A'_1 est double biplanaire et à ce point fait suite un point double conique infiniment voisin représenté par ρ_0. Nous avons d'ailleurs rencontré, en cherchant le comportement des courbes C''_0 en A, des courbes passant deux fois par le point $(\beta, 5, 2)$; ce sont des courbes C''_0 particulières et il leur correspond, sur Φ_1, des courbes découpées par les hyperplans passant par la droite commune aux deux plans tangents à la surface en A'_1.

Nous avons

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_\alpha + \tau_\alpha + \rho_1 + \rho_0 + \rho_2 + \sigma_\beta\,,$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0'' + \sigma_\alpha + \tau_\alpha + 2(\rho_1 + \rho_0 + \rho_2) + \sigma_\beta\,,$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(5)} + \sigma_\alpha + \tau_\alpha + 3(\rho_1 + \rho_0) + 2\rho_2 + \sigma_\beta\,.$$

Les courbes rationnelles $\sigma_\alpha, \tau_\alpha, \rho_1, \rho_0, \rho_2, \sigma_\beta$ ont respectivement pour degrés virtuels -2, -5, -2, -2, -2, -2.

D'après la dernière relation écrite, les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ doivent rencontrer τ_α en un point et ρ_1, en deux points alors que τ_α n'apparaît pas sur Φ_5 et que ρ_1 y figure comme droite et non comme conique. Retournons à la surface Φ_2. Sur cette surface, les courbes Γ_0'''' sont découpées par les hyperplans passant par A_2', point commun à la conique τ_α et à la droite ρ_1 ; les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ sont découpées par les hyperplans touchant la conique τ_α en A_2' ; les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ par les hyperplans passant en outre par ρ_1. Il en résulte que ces courbes, qui contiennent ρ_1 comme partie, ont A_2' comme point-base simple. C'est ce qui explique la présence de la droite exceptionnelle ρ_1, qui représente le point A_2', sur la surface Φ_5 et que, de plus, τ_α ne figure pas sur cette surface et que ρ_1 y figure comme droite.

10. La structure du point de diramation A′ est maintenant connue et il n'est pas difficile d'étudier le comportement en A des courbes $C_0^{(6)}$, $C_0^{(7)}$, ... Bornons-nous aux deux premières.

Les courbes $C_0^{(6)}$ ont la multiplicité 19 en A. Elles passent douze fois par le point $(\alpha, 1)$ et six fois par les points $(\alpha, 2)$, $(\alpha, 2, 1)$. Elles passent en outre une fois par les points $(\beta, 2, 3)$ et $(\beta, 5, 2)$.

Sur la surface Φ_6, d'ordre $n - 18$, nous avons une sextique rationnelle τ_α, une droite ρ_1 rencontrant τ_α en un point et une droite ρ_0 rencontrant ρ_1 en un point. La surface Φ_6 est la projection de Φ_5 à partir du point A_5' commun aux droites σ_α et ρ', point qui représente τ_α.

Les courbes $C_0^{(7)}$ passent 22 fois par A, dix fois par $(\alpha, 1)$, cinq fois par $(\alpha, 2)$ et $(\alpha, 2, 1)$, une fois par $(\beta, 1, 4, 1)$ et une fois par $(\beta, 5, 2)$.

La surface Φ_7, d'ordre $n - 19$, contient une quintique τ_α, une droite exceptionnelle ρ' et une droite ρ_0. Elle est la projection, à partir du point A'_6 commun à τ_α et ρ_1, de la surface Φ_6.

En un point de diramation A', *correspondant aux nombres* $\alpha = 21$, $\beta = 30$, *la surface* Φ, *multiple d'ordre* 37, *possède la multiplicité cinq. Le cône tangent est formé d'un plan* (σ_α), *d'un cône cubique* (τ_α) *et d'un plan* (σ_β) *; le cône est rencontré par chacun des plans suivant une génératrice, mais les plans ne se rencontrent pas en dehors de* A'. *Au point* A' *sont infiniment voisins successifs deux points doubles dont le premier, situé sur la droite commune à* (τ_α), (σ_β), *est biplanaire et le second conique.*

11. Nous allons maintenant montrer qu'il peut exister des surfaces multiples d'ordre 37 sur lesquelles les points de diramation qui viennent d'être considérés existent simultanément.

Supposons que F soit un plan et considérons l'homographie de période 37,

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \epsilon x_2 : \epsilon^{24} x_3, \tag{1}$$

où ϵ est une racine primitive d'ordre 37 de l'unité.

Le point uni O_1 $(x_2 = x_3 = 0)$ est caractérisé par les nombres $\alpha = 24$, $\beta = 17$.

Les équations (1) peuvent s'écrire sous la forme

$$x'_1 : x'_1 : x'_3 = \epsilon^{13} x_1 : \epsilon^{14} x_2 : x_3$$

ou, en posant $\eta = \epsilon^{13}$,

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = \eta x_1 : \eta^{21} x_2 : x_3.$$

Le point uni O_3 $(x_1 = x_2 = 0)$ est caractérisé par les nombres $\alpha = 21$, $\beta = 30$.

On peut encore écrire les équations (1) sous la forme

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = \epsilon^{36} x_1 : x_2 : \epsilon^{23} x_3,$$

ou encore, en posant $\zeta = \epsilon^{36}$,

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = \zeta x_1 : x_2 : \zeta^{14} x_3.$$

Le point uni $O_2(x_1 = x_3 = 0)$ est caractérisé par les nombres $\alpha = 14$, $\beta = 8$.

12. Il n'est pas difficile de déterminer la structure du point de diramation correspond au point O_2 sur une surface Φ représentant l'involution engendrée par l'homographie (1) dans le plan F. Nous l'indiquerons rapidement.

Les courbes C_0 passant par O_2 ont en ce point la multiplicité neuf. Elles passent quatre fois par le point $(\alpha, 1)$, deux fois par les points $(\alpha, 2), \ldots, (\alpha, 13)$, une fois par les points $(\alpha, 1, 1), (\alpha, 1, 1, 1,)$ et quatre fois par les points $(\beta, 1), \ldots, (\beta, 7)$.

Sur la surface Φ_1, nous avons une conique σ_α, une droite τ_α rencontrant σ_α ou un point A_1'', une quartique σ_β rencontrant τ_α en un point A_1', mais ne rencontrant pas σ_α.

En poursuivant l'examen des courbes passant par O_2, on voit que les points A_1', A_1'' sont simples pour la surface Φ_1, de sorte que, sur la surface Φ, le point de diramation correspondant à O_2 est multiple d'ordre sept, le cône tangent se décomposant en un cône du second ordre (σ_α), un plan (τ_α) et un cône du quatrième ordre (σ_β). Le plan coupe chacun des cônes suivant une droite, mais les deux cônes ne se rencontrent pas en dehors du sommet commun.

Le point de diramation est équivalent à trois courbes rationnelles σ_α, τ_α, σ_β respectivement de degrés virtuels -3, -3, -5.

13. Revenons au plan F et à l'involution I engendrée par l'homographie (1).

Dans le plan F, nous prendrons comme système $|C|$ le système complet des courbes d'ordre 37. Le système $|C_0|$ a alors la dimension 20.

Rapportons projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace linéaire S_{20}. Nous obtenons une surface normale Φ, d'ordre 37, image de l'involution I. Les sections hyperplanes de Φ ont le genre 17.

Désignons par O_1', O_2', O_3' les points de diramation homologues de O_1, O_2, O_3.

Le point O_1' est quadruple par Φ et est équivalent à un ensemble de sept courbes rationnelles

$$\sigma_\alpha^{(1)},\ \tau_\alpha^{(1)},\ \rho_{11}^{(1)},\ \rho_{21}^{(1)},\ \rho_{22}^{(1)},\ \rho_{12}^{(1)},\ \sigma_\beta^{(1)},$$

dont chacune rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres. Ces courbes ont respectivement les degrés virtuels — 2, — 3, — 2, — 2, — 2, — 2, — 3.

Le point O_2' est heptuple pour la surface Φ et est équivalent à trois courbes rationnelles

$$\sigma_\alpha^{(2)},\quad \tau_\alpha^{(2)},\quad \sigma_\beta^{(2)}$$

de degrés virtuels respectifs — 3, — 3, — 5. La courbe $\tau_\alpha^{(2)}$ rencontre les deux autres chacune en un point, mais la première et la troisième courbe ne se rencontrent pas.

Le point O_3' est quintuple pour la surface Φ et est équivalent à un ensemble de six courbes rationnelles

$$\sigma_\alpha^{(3)},\quad \tau_\alpha^{(3)},\quad \rho_1^{(3)},\quad \rho_0^{(3)},\quad \rho_2^{(3)},\quad \sigma_\beta^{(3)}$$

respectivement de degrés virtuels — 2, — 5, — 2, — 2, — 2, — 2. Chacune de ces courbes rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres.

Liège, le 12 février 1955.