Bulletin de la Classe des sciences

Sur la surface des couples de points de la quintique de Snyder

Lucien Godeaux

Résumé
La quintique de Snyder, de genre six, contient une involution rationnelle cyclique d'ordre treize. La surface qui représente les couples de points de cette quintique, d'irrégularité six, contient en conséquence une involution cyclique d'ordre treize, possédant six points unis. On démontre que cette involution est rationnelle.

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur la surface des couples de points de la quintique de Snyder,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — La quintique de Snyder, de genre six, contient une involution rationnelle cyclique d'ordre treize. La surface qui représente les couples de points de cette quintique, d'irrégularité six, contient en conséquence une involution cyclique d'ordre treize, possédant six points unis. On démontre que cette involution est rationnelle.

Si une courbe algébrique L possède une involution cyclique d'ordre premier p supérieur à 2, la surface F qui représente les couples de points de L contient à son tour une involution cyclique d'ordre p, présentant un nombre fini de points unis. La surface Φ image de cette involution est irrégulière si l'involution donnée sur L n'est pas rationnelle. Si au contraire cette involution est rationnelle, la surface Φ peut être régulière et même rationnelle. On démontre ici que si L est le quintique de Snyder [1], l'involution étant d'ordre $p = 13$, la surface Φ est rationnelle.

Nous utilisons pour arriver à ce résultat nos recherches sur la structure des points de diramation des surfaces multiples [2];

---

[1] V. Snyder, *Plane quintic curves which possess a group of linear Transformations* (American Journal of Mathematics, 1908, t. XXX, pp. 1-9). Voir aussi E. Ciani, *Le quintiche piane autoproiettive* (Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo, 1913, t. XXXVI ; Scritti geometrici scelti, Padova, 1937, pp. 689-713).

[2] *Mémoire sur les surfaces multiples* (Mémoires in-8° de l'Académie royale de Belgique, 1952) ; *Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples* (Deuxième Colloque de Géométrie algébrique, Liège, 1952, pp. 225-241).

nous avons renvoyé à la fin de ce travail l'étude de la structure des points de diramation rencontrés ici. D'autre part, nous renvoyons aux travaux de M. Severi pour les propriétés utilisées ici de la surface représentant les couples de points d'une courbe algébrique ([1]).

1. La quintique de Snyder a pour équation

$$a_1 x_1^4 x_2 + a_2 x_2^4 x_3 + a_3 x_3^4 x_1 = 0\,; \tag{L}$$

elle est transformée en soi par l'homographie

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \epsilon x_2 : \epsilon^{10} x_3, \tag{1}$$

où ϵ est une racine primitive d'ordre 13 de l'unité. Cette homographie engendre, sur la courbe L, une involution γ d'ordre 13 ayant trois points unis, les sommets O_1, O_2, O_3 du triangle de référence. La courbe L est de genre six et l'involution γ est rationnelle.

Soit F la surface représentant les couples de points de la courbe L. Si un point P de F représente le couple de points P_1, P_2 de L et si l'homographie (1) fait correspondre à P_1, P_2 respectivement les points P_1', P_2', nous ferons correspondre à P le point P' qui représente le couple P_1', P_2'. Nous définissons ainsi une transformation birationnelle T de F en soi, de période 13, qui engendre sur F une involution I d'ordre 13, ayant six points unis : les points O_{11}, O_{22}, O_{33} qui représentent respectivement les points O_1, O_2, O_3 comptés chacun deux fois et les points O_{23}, O_{31}, O_{12} qui représentent les couples O_2 et O_3, O_3 et O_1, O_1 et O_2.

Désignons par K les courbes qui représentent les couples de points de L dont un point est fixe. Les courbes K forment un système continu $\{K\}$, ∞^1, de degré un et d'indice deux. L'enveloppe K_0 du système $\{K\}$ est la courbe qui représente sur F le lieu des images des couples de points de L formés de deux points superposés.

([3]) *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica* (Atti della Accad. di Torino, 1903, t. XXXVIII, pp. 185-200) ; *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certi classi di superficie* (Memorie della Accad. di Torino, 1903, t. LIV).

Soient K_1, K_2, K_3 les courbes K qui correspondent aux points O_1, O_2, O_3 de L. Les points unis O_{11}, O_{22}, O_{33} de I sont les points de contact des courbes K_1, K_2, K_3 avec K_0 ; le point O_{23} est l'intersection des courbes K_2, K_3, le point O_3 celui des courbes K_3, K_1, le point O_{12}, celui des courbes K_1, K_2.

Nous avons démontré (1) qu'au point uni O_{11}, de seconde espèce, est infiniment voisin un point uni de première espèce O'_{11}, commun aux courbes K_0 et K_1. De même, aux points O_{22}, O_{33} sont infiniment voisins des points unis de première espèce situés sur la courbe K_0 et respectivement sur K_2, K_3.

Nous avons d'autre part établi (2) que les points unis O_{23}, O_{31}, O_{12} sont de seconde espèce et correspondent aux entiers $\alpha = 3$, $\beta = 9$.

2. Désignons par Φ une surface image de l'involution I sur laquelle les points de diramation sont isolés. Soit A_{ik} le point de diramation qui correspond au point uni $O_{ik}(i, k = 1, 2, 3)$.

Le point A_{11} est équivalent à deux courbes rationnelles $\sigma_\alpha^{(11)}$, $\sigma_\beta^{(11)}$ se coupant en un point, la première de degré virtuel -7, la seconde de degré virtuel -2. Par conséquent, s'il existe sur Φ une courbe canonique, celle-ci doit rencontrer la courbe $\sigma_\alpha^{(11)}$ en cinq points. Par suite, la transformée de la courbe canonique de Φ sur F doit passer cinq fois par les points O_{11}, O'_{11}. Et elle a un comportement analogue en O_{22}, O_{33}.

Le point A_{23} est équivalent à un ensemble de trois courbes rationnelles $\sigma_\alpha^{(23)}$, $\rho^{(23)}$, $\sigma_\beta^{(23)}$, la première de degré virtuel -5, les autres de degré virtuel -2. S'il existe une courbe canonique sur la surface Φ, elle doit rencontrer la courbe $\sigma^{(23)}$ en trois points, mais ne rencontre pas les autres. Au point O_{23} sont infiniment voisins successifs sur l'une des courbes K_{21}, K_3, deux points unis dont le second est de première espèce et ce dernier

(1) *Sur la structure des points unis d'une involution appartenant à la surface des couples de points d'une courbe algébrique* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1950, pp. 383-387).

(2) *Sur les involutions cycliques appartenant à la surface des couples de points d'une courbe algébrique* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1955, pp. 109-110). Au bas de la page 1098, il faut lire $t = \gamma - 3$ et non t est le plus grand entier contenu dans $\frac{1}{2}(\gamma - 3)$.

point doit être triple, par la courbe canonique de F transformée de la courbe canonique éventuelle de Φ. Il en résulte que cette courbe canonique de F doit passer trois fois par le point O_{23} et trois fois par les deux points infiniment voisins successifs de O_{23} dont il vient d'être question.

On arrive à des conclusions analogues pour O_{31}, O_{12}.

Si la surface Φ possède une courbe canonique, la transformée de celle-ci sur F possède deux points quintuples infiniment voisins en chacun des points O_{11}, O_{22}, O_{33}, un point triple en O_{23} et deux points triples infiniment voisins successifs situés sur K_2, un point triple en O_{31} et deux points triples infiniment voisins successifs sur K_3, un point triple en O_{12} et deux points triples infiniment voisins successifs sur K_1.

3. On sait (Severi) que les courbes canoniques de F correspondent aux séries canoniques simplement infinies de la courbe L. D'une manière précise, si g_{10}^1 est une série canonique de L, les couples de points de chacun de ses groupes ont pour images, sur F, les points d'une courbe canonique H de cette surface.

Une courbe canonique H de F est rencontrée en 9 points, par les courbes K et en 30 points par la courbe K_0.

Cela étant, supposons que la surface Φ possède une courbe canonique. Sa transformée sur F est une courbe canonique H rencontrée en 22 points par chacune des courbes K_1, K_2, K_3. Par conséquent, elle contient ces courbes. Le faisceau de coniques adjointes à la courbe L qui découpe sur celle-ci la série canonique g_{10}^1 qui correspond à la courbe canonique envisagée sur F doit donc avoir comme points-base les points O_1, O_2, O_3.

La courbe $H - K_1 - K_2 - K_3$ doit avoir deux points quadruples infiniment voisins en O_{11}, un point double suivi de deux points doubles infiniment voisins successifs sur K_1 en O_{12}, un point double en O_{31}. Elle est d'autre part rencontrée en six points par une courbe K ; elle contient donc la courbe K_1 et de même les courbes K_2, K_3. Le faisceau de coniques adjointes à L correspondant doit donc être formé de coniques touchant O_1O_2 en O_1, O_2, O_3 en O_2 et O_3O_1 en O_3. Un tel faisceau n'existe pas et par conséquent, la surface Φ est dépourvue de courbe canonique. Son genre géométrique est $p_g = 0$.

4. Les courbes bicanoniques de F sont les courbes du système $|2H|$. Supposons que la surface Φ possède une courbe bicanonique. Sa transformée en F est une courbe $H_2 \equiv 2H$ qui se comporte, aux points unis, comme deux fois les courbes H.

Si l'on répète le raisonnement fait pour les courbes canoniques, on voit que la courbe H_2 contient six fois chacune des courbes K_1, K_2, K_3. Les courbes

$$H_2 - 6(K_1 + K_2 + K_3)$$

ne sont plus rencontrées par les courbes K. Mais cela est impossible, car le système $\{K\}$, sur une surface F dépourvue de courbes exceptionnelles, ne peut avoir de courbes fondamentales.

On en conclut que la surface Φ ne peut posséder de courbe bicanonique ; son bigenre est $P_2=0$.

5. Le genre arithmétique de Φ est $p_a \leqslant 0$.

La surface Φ ne peut être une réglée de genre $-p_a > 0$, ou référable à une réglée de ce genre, car elle contiendrait un faisceau de genre $-p_a$ de courbes rationnelles et à celui-ci correspondrait sur F un faisceau de genre $-p_a$ de courbes rationnelles, ce qui est impossible.

Si la surface Φ était une surface elliptique, de genre $p_a = -1$, elle contiendrait un faisceau elliptique de courbes. A ce faisceau correspondrait sur F un faisceau elliptique de courbes, ce qui est impossible

On a donc $p_a = 0$ et la surface Φ, caractérisée par $p_a = P_2 = 0$, est rationnelle d'après le théorème classique de Castelnuovo.

6. Il nous reste à établir les singularités des points de diramation de la surface Φ.

Considérons sur F le système 13-canonique $|13H|$. Il contient certainement un système linéaire partiel $|(13H)_0|$, composé au moyen de l'involution I et privé de point-base.

Fixons l'attention en premier lieu sur le point O_{11}. Les nombres qui lui sont attachés sont $\alpha = 2$, $\beta = 7$. C'est un point uni de seconde espèce et de première catégorie.

Les courbes $(13H)_0$ passant par O_{11} ont en ce point la multiplicité 7, avec un point O'_{11} infiniment voisin, uni de première espèce, multiple d'ordre 6, situé sur K_0, K_1, et une suite de six points simples infiniment voisins successifs, dont le dernier est uni de première espèce. Ces points sont situés sur la courbe qui représente les couples de points de L alignés sur O_3.

Au domaine du point O'_{11} correspond sur Φ une courbe rationnelle de degré — 7 et au domaine du dernier point de la seconde suite, une courbe rationnelle de degré — 2 rencontrant la précédente en un point.

Considérons maintenant le point O_{23}, qui correspond aux entiers $\alpha = 3$, $\beta = 9$. Les courbes $(13H)_0$ passant par O_{23}, que nous désignerons par $(13H)_0^1$, ont en O_{23} la multiplicité cinq, passent quatre fois par deux points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$ infiniment voisins successifs de O_{23} sur la courbe K_2, dont le dernier est uni de première espèce, une fois par huit points $(\beta, 1)$, ..., $(\beta, 8)$ infiniment voisins successifs de O_{23} sur la courbe K_3, le dernier de ces points étant uni de première espèce.

Les courbes $(13H)_0'$ assujetties à toucher en O_{23} une droite non tangente en ce point à K_2 ou K_3, ont en ce point la multiplicité sept, passant trois fois par $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, quatre fois par $(\beta, 1)$, deux fois par $(\beta, 2)$ et par un point infiniment voisin $(\beta, 2, 1)$, uni de première espèce.

Aux domaines des points $(\alpha, 2)$, $(\beta, 2, 1)$, $(\beta, 8)$ correspondent respectivement sur Φ une courbe rationnelle σ_α de degré virtuel — 5, une courbe ρ de degré virtuel — 2 et une courbe σ_β de degré virtuel — 2. La courbe ρ rencontre chacune des courbes σ_α, σ_β en un point, mais σ_α et σ_β ne se rencontrent pas.

Liège, le 6 décembre 1955.