Bulletin de la Classe des sciences

Rapports sur un mémoire : Tits (Jacques), *Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie*

Théophile Henri Joseph Lepage, Lucien Godeaux, Fernand Simonart

RAPPORTS SUR LE MÉMOIRE DE M. J. TITS :

Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie.

Le Mémoire comporte l'étude de certaines propriétés géométriques pour deux catégories d'espaces homogènes de groupes de Lie. Il comprend quatre parties. La première rappelle les notions de théorie des groupes de Lie qui seront utilisées, la deuxième partie expose les éléments géométriques indispensables relatifs aux espaces homogènes. L'auteur y met l'accent sur le fait que l'étude des espaces homogènes est étroitement liée à celle des espaces projectifs. La plupart des espaces homogènes peuvent être contruits à partir des espaces projectifs réels, complexes ou quaternioniens, au moyen d'un procédé uniforme, en faisant essentiellement usage des notions de sous-espaces linéaires, et des notions de polarité et d'involution.

Après ces deux parties introductives, l'auteur étudie successivement, dans les troisième et quatrième parties, deux grandes classes d'espaces homogènes.

Les espaces étudiés dans la troisième partie, dénommés par l'auteur espaces de la classe C, ont été considérés, sous des aspects divers, notamment par A. BOREL, A. WEIL, C. CHEVALLEY et H. C. WANG. Ils peuvent être caractérisés comme étant des variétés complexes, compactes, homogènes et de caractéristique d'Euler non-nulle. L'auteur les introduit, dans le cadre de la théorie des groupes de Lie, comme espaces homogènes $E = G/H$ où G est un groupe complexe semi-simple et où H est un sous-groupe de G contenant un sous-groupe résoluble maximal. Ou encore, E est un espace de la classe C lorsque tout sous-groupe résoluble connexe de G, envisagé comme groupe de transformations de E, possède un point fixe dans E. Les espaces C sont les seuls espaces homogènes de groupes analytiques complexes jouissant de cette propriété.

En considérant (section III, C) certains schémas, associés aux algèbres de Lie des groupes G et H, l'auteur déduit, par des règles simples, des propriétés de l'espace E. La nature de ces propriétés géométriques est mise en évidence en traitant spécialement le cas où E est l'espace projectif complexe E^n à n dimensions. Ces propriétés sont principalement relatives à l'existence de certains sous-espaces privilégiés, isomorphes à des espaces de la classe C. Pour E^n, il s'agit des sous-espaces linéaires isomorphes à des espaces projectifs de dimension inférieure à n. De plus, la méthode met en lumière certaines relations d'incidence existant entre ces sous-espaces. Ce point étant acquis, l'auteur envisage (section III, D) le problème général de la détermination de tous les sous-ensembles de E isomorphes à un autre espace donné F. Il le résoud entièrement dans les deux cas suivants : E est l'espace projectif complexe ou la grassmannienne des droites de cet espace et où F est un espace quelconque de la classe C. L'auteur établit qu'il existe dans l'espace de toute représentation irréductible d'un sous-groupe semi-simple une sous-variété déterminée, invariante pour les projectivités de la représentation, et isomorphe à certain espace de la classe C.

Les trois sections (III ; B, C, D) étudiaient les propriétés générales des espaces E ; la section (III, E) comporte une application des résultats obtenus à l'étude des espaces des groupes exceptionnels : G_2, E_6, F_4, E_7, E_8. L'auteur y montre comment l'on peut construire, par l'emploi de règles uniformes, des géométries dont les groupes d'automorphismes sont les groupes en question. Cette étude permet, d'une part de retrouver la plupart des propriétés connues de ces groupes et de leurs formes réelles et, d'autre part, elle permet de réduire la recherche des propriétés des formes réelles, des sous-groupes maximaux, notamment, à des questions de géométrie projective.

La quatrième partie est également relative à l'étude de certains espaces homogènes ; mais ces derniers sont abordés sous un angle très différent. Les problèmes étudiés ici se situent dans le cadre de la caractérisation des espaces par des propriétés de transitivité. Un problème classique de ce type est celui d'*Helmholtz-Lie* consistant en la recherche de conditions caractérisant les groupes de mouvements des géométries euclidiennes et non-euclidiennes parmi tous les ensembles possibles de mouvements.

L'auteur résout les problèmes suivants :

a) Déterminer les espaces de groupes de Lie doublement homogènes, c'est-à-dire des espaces G /H sur lesquels G est doublement transitif ;

b) Déterminer les espaces homogènes et isotropes, c'est-à-dire les espaces G /H tels que G soit transitif sur les directions tangentes à l'espace.

Il détermine également tous les espaces de groupes de Lie homogènes en leurs n = uples de points.

Dans cette étude l'auteur se fonde sur les travaux récents relatifs aux sous-algèbres maximales des algèbres de Lie complexes simples (MOROZOW, MALCEV, KARPELEVITCH, DYNKIN) et sur ceux concernant la structure des groupes localement compacts (IWASAWA, GLEASON, MONTGOMERY, ZIPPIN, YAMABE).

Ce résumé de Mémoire ne donne qu'une faible idée de la contribution à l'étude des propriétés géométriques de certains espaces. L'auteur, très au courant de l'état actuel des travaux en théorie des groupes de Lie, a su établir de nouveaux liens entre cette dernière et la géométrie des espaces homogènes. Nous estimons que le travail est en tous points digne d'être inséré dans la série des Mémoires de l'Académie.

Th. LEPAGE.

Je me rallie au rapport et aux conclusions de mon savant confrère M. Lepage.

L. GODEAUX.

Je me range à l'avis de mon honoré confrère, M. Lepage.

Fernand SIMONART.