A study of dendricity through the lens of morphisms

Défense de thèse de

France Gheeraert

14 décembre 2023

Mots Sturmiens

Ils ont de nombreuses définitions/caractérisations :

- mots de complexité $n+1$
- mots binaires équilibrés apériodiques
- codages de rotations irrationnelles
- mots binaires ayant exactement un facteur spécial à droite et un facteur spécial à gauche de chaque longueur

Mots Sturmiens

Ils ont de nombreuses définitions/caractérisations :

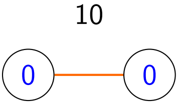
- mots de complexité $n+1$
  $\rightarrow$ mots quasi-Sturmiens
- mots binaires équilibrés apériodiques
  $\rightarrow$ mots équilibrés
- codages de rotations irrationnelles
  $\rightarrow$ codages d'échanges d'intervalles réguliers
- mots binaires ayant exactement un facteur spécial à droite et un facteur spécial à gauche de chaque longueur
  $\rightarrow$ mots d'Arnoux-Rauzy (ou épisturmiens stricts)

Graphes d'extensions

$$1001001100100100110\,1100\cdots$$

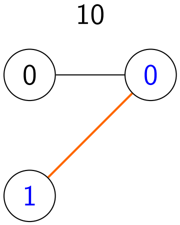
10

$$100100110010010011011 00\cdots$$

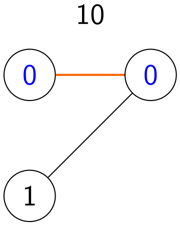


Graphes d'extensions

1001001100100100110110 0 ⋯

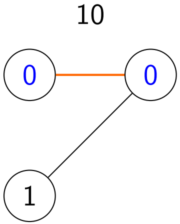


$$1001001100\textcolor{blue}{0}\textcolor{orange}{10}\textcolor{blue}{0}1001101100\cdots$$



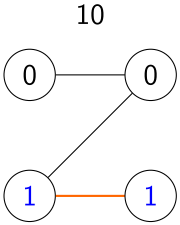
Graphes d'extensions

$1001001100100\textcolor{blue}{0}\textcolor{orange}{10}\textcolor{blue}{0}1101100\cdots$



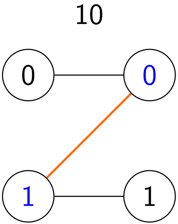
Graphes d'extensions

$1001001100100100\textcolor{blue}{1}\textcolor{orange}{10}\textcolor{blue}{1}100\cdots$



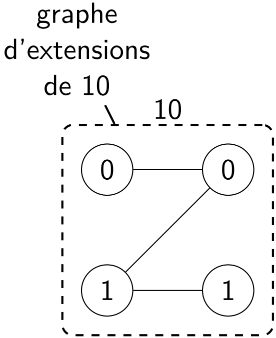
Graphes d'extensions

$100100110010010011011 00\cdots$



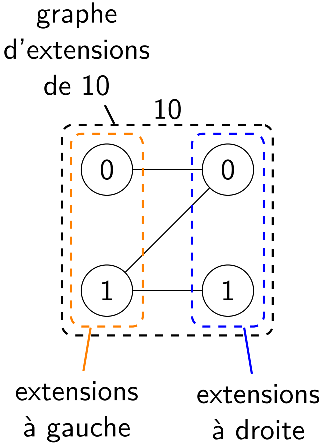
Graphes d'extensions

$1001001100100100110110 0\cdots$



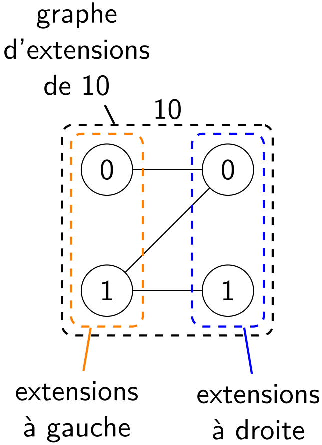
Graphes d'extensions

$$1001001100100100110 1100\cdots$$



Graphes d'extensions

100100110010010011011100 $\cdots$



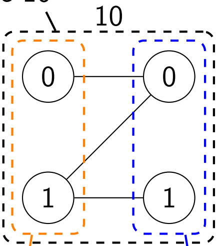
évolution des
graphes de Rauzy

10

Graphes d'extensions

10010011001001001101100 · · ·

graphe d'extensions de 10



extensions à gauche

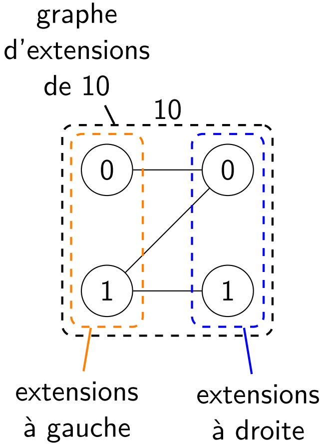
extensions à droite

évolution des graphes de Rauzy

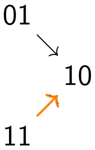
01 ↘ 10

Graphes d'extensions

1001001100100100110110 $\cdots$

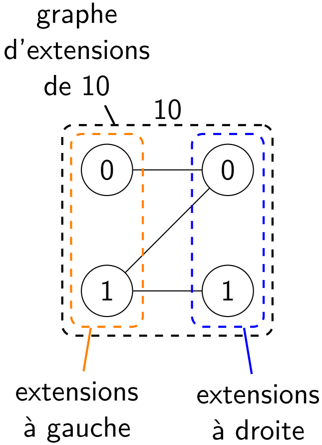


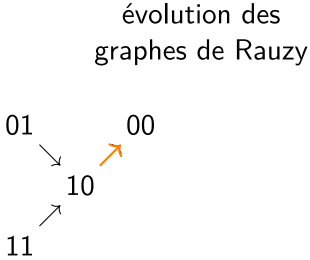
évolution des
graphes de Rauzy



Graphes d'extensions

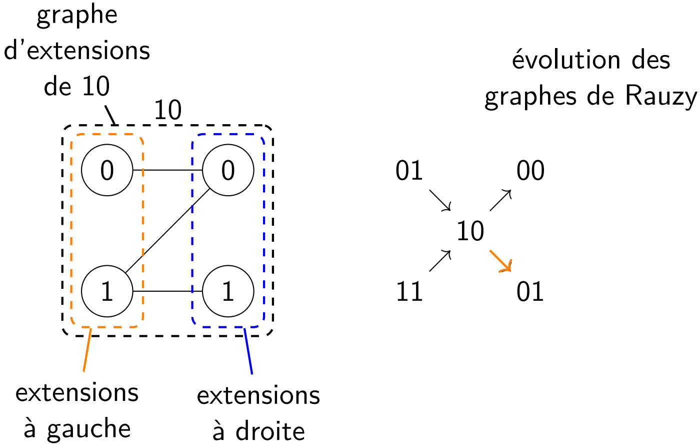
100100110010010011011100···





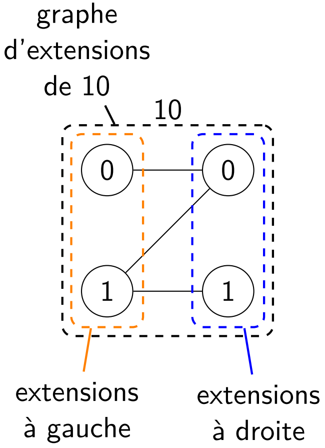
Graphes d'extensions

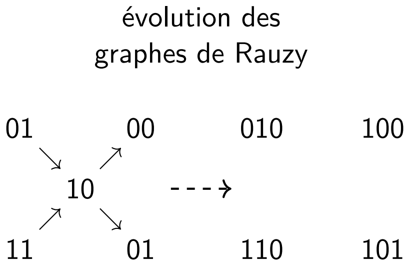
$1001001100100100 1\color{orange}{101}\color{black}100\cdots$



Graphes d'extensions

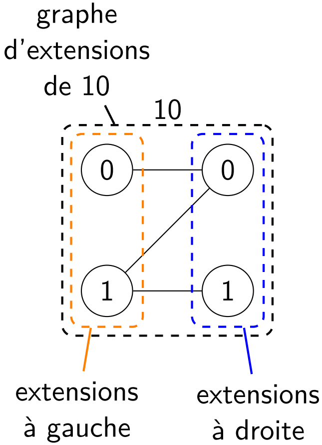
$$1001001100100100110110 0\cdots$$

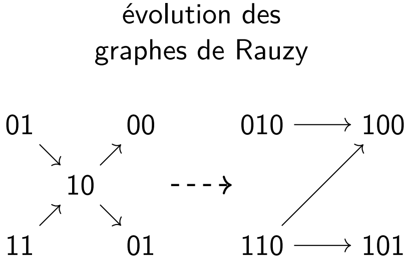




Graphes d'extensions

$$1001001100100100110110 0\cdots$$





Mots dendriques

Définition (Berthé, De Felice, Dolce, Leroy, Perrin, Reutenauer, Rindone)

Un facteur de x est *dendrique* si son graphe d'extensions est un arbre.

Un mot infini x est *dendrique* si tous ses facteurs le sont.

Mots dendriques

Définition (Berthé, De Felice, Dolce, Leroy, Perrin, Reutenauer, Rindone)

Un facteur de x est *dendrique* si son graphe d'extensions est un arbre.

Un mot infini x est *dendrique* si tous ses facteurs le sont.

Les mots dendriques :

- sont de complexité $(\mathrm{Card}\,\mathcal{A} - 1)n + 1$,
- sont stables par dérivation et par décodage bifixe maximal,
- ont des mots de retour satisfaisant de fortes propriétés algébriques,
- contiennent les codages d'échanges d'intervalles réguliers et les mots d'Arnoux-Rauzy.

Mots ultimement dendriques

Définition (Dolce, Perrin)

Un mot infini x est *ultimement dendrique* si tous ses facteurs assez longs le sont.

Les mots ultimement dendriques :

- sont de complexité ultimement affine,
- sont stables par dérivation, décodage bifixe maximal et conjugaison,
- contiennent les mots quasi-Sturmiens et les mots équilibrés.

Deux questions naturelles

1. Comment générer des exemples “arbitraires” ?

2. Comment déterminer si un mot infini est (ultimement) dendrique ?

Un exemple fil rouge

On s'intéresse à

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\sigma}^{\omega}(2)) = 1001001100100100110110 0\cdots$$

où

$$\boldsymbol{\tau}: \begin{cases} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 0 \\ 2 \mapsto 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}: \begin{cases} 0 \mapsto 202 \\ 1 \mapsto 2102102102 \\ 2 \mapsto 2102102 \end{cases}.$$

Un exemple fil rouge

On s'intéresse à

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\sigma}^{\omega}(2)) = 1001001100100100110 1100\cdots$$

où

$$\boldsymbol{\tau} : \begin{cases} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 0 \\ 2 \mapsto 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma} : \begin{cases} 0 \mapsto 202 \\ 1 \mapsto 2102102102 \\ 2 \mapsto 2102102 \end{cases}.$$

Il n'est pas dendrique car on a les facteurs 00, 01, 10, 11.

Suites purement morphiques et reconnaissabilité

Théorème (Mossé, Béal–Perrin–Restivo)

Si $x = \sigma^\omega(a)$ est apériodique, il existe L tel que, pour tout facteur u assez long, il existe des facteurs s, v, p avec $|s|, |p| \leq L$ tels $u = s\sigma(v)p$ et toute occurrence de u provient de l'image (étendue par s et p) d'une occurrence de v.

Suites purement morphiques et reconnaissabilité

Théorème (Mossé, Béal–Perrin–Restivo)

Si $x = \sigma^\omega(a)$ est apériodique, il existe L tel que, pour tout facteur u assez long, il existe des facteurs s, v, p avec $|s|, |p| \leq L$ tels $u = s\sigma(v)p$ et toute occurrence de u provient de l'image (étendue par s et p) d'une occurrence de v.

C'est l'approche utilisée par Klouda pour décrire les facteurs bispéciaux.

Problèmes :

- Il faut adapter au cas (non purement) morphique.
- La reconnaissabilité n'est pas assez "fine" que pour comprendre les graphes d'extensions.

Des morphismes un peu particuliers

Théorème (Durand)

Si $x = \tau(\sigma^\omega(a))$ *est un mot infini apériodique uniformément récurrent, alors il existe des morphismes de retour* *<u>constructibles</u>* λ *et* θ *tels que* $x = \lambda(\theta^\omega(0))$.

Des morphismes un peu particuliers

Théorème (Durand)

Si $x = \tau(\sigma^\omega(a))$ est un mot infini apériodique uniformément récurrent, alors il existe des morphismes de retour constructibles λ et θ tels que $x = \lambda(\theta^\omega(0))$.

Définition

Un morphisme $\sigma\colon \mathcal{A}^* \to \mathcal{B}^*$ est un *morphisme de retour* pour w si σ est injectif sur les lettres et, pour tout $a \in \mathcal{A}$, $\sigma(a)w$ contient exactement deux occurrences de w, en tant que préfixe et en tant que suffixe.

$$\boldsymbol{\lambda}\colon \begin{cases} 0 \mapsto 100 \\ 1 \mapsto 1001 \\ 2 \mapsto 1001101 \end{cases} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\theta}\colon \begin{cases} 0 \mapsto 01002 \\ 1 \mapsto 0100201 \\ 2 \mapsto 01002010201 \end{cases}$$

sont des morphismes de retour pour 100 et 0100 respectivement.

Des morphismes un peu particuliers

Théorème (Durand)

Si $x = \tau(\sigma^\omega(a))$ est un mot infini apériodique uniformément récurrent, alors il existe des morphismes de retour constructibles λ et θ tels que $x = \lambda(\theta^\omega(0))$.

Définition

Un morphisme $\sigma\colon \mathcal{A}^* \to \mathcal{B}^*$ est un *morphisme de retour* pour w si σ est injectif sur les lettres et, pour tout $a \in \mathcal{A}$, $\sigma(a)w$ contient exactement deux occurrences de w, en tant que préfixe et en tant que suffixe.

$$\boldsymbol{\lambda}\colon \begin{cases} 0 \mapsto 100100 \\ 1 \mapsto 1001100 \\ 2 \mapsto 1001101100 \end{cases} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\theta}\colon \begin{cases} 0 \mapsto 010020100 \\ 1 \mapsto 010020100100 \\ 2 \mapsto 010020102010100 \end{cases}$$

sont des morphismes de retour pour 100 et 0100 respectivement.

Un facteur peut en cacher un autre

dans
$\mathbf{x} = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\theta}^{\omega}(0))$

0110010010011011001

$\uparrow \boldsymbol{\lambda}$

dans
$\mathbf{y} = \boldsymbol{\theta}^{\omega}(0)$

?

Un facteur peut en cacher un autre

dans
$\mathbf{x} = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\theta}^{\omega}(0))$

dans
$\mathbf{y} = \boldsymbol{\theta}^{\omega}(0)$

$$\begin{array}{c} a0110010010011011001b \\ \uparrow \boldsymbol{\lambda} \\ ? \end{array}$$

Un facteur peut en cacher un autre

$$\begin{tikzcd} a01 \mid 100 \mid 100 \mid 1001101 \mid 1001b \\ a0110010010011011001b \arrow[u, dashed] \\ ? \arrow[u, "\lambda"] \end{tikzcd}$$

dans
$\mathbf{x} = \lambda(\theta^\omega(0))$

dans
$\mathbf{y} = \theta^\omega(0)$

Un facteur peut en cacher un autre

suffixe de $\boldsymbol{\lambda}(c)$ préfixe de $\boldsymbol{\lambda}(d)100$

$\boxed{a01} \mid 100 \mid 100 \mid 1001101 \mid \boxed{1001b}$

dans $\mathbf{x} = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\theta}^{\omega}(0))$

$a01100100100110110 01b$

$\boldsymbol{\lambda}$

dans $\mathbf{y} = \boldsymbol{\theta}^{\omega}(0)$

$?$

Un facteur peut en cacher un autre

suffixe de $\lambda(c)$ préfixe de $\lambda(d)100$

$\boxed{a01} \mid 100 \mid 100 \mid 1001101 \mid \boxed{1001b}$

dans $\mathbf{x} = \lambda(\theta^{\omega}(0))$

$a0110010010011011001b$

$$\uparrow \lambda$$

dans $\mathbf{y} = \theta^{\omega}(0)$

$c002d$

Un facteur peut en cacher un autre

suffixe de $\lambda(c)$ préfixe de $\lambda(d)100$

$\boxed{a01} \mid 100 \mid 100 \mid 1001101 \mid \boxed{1001b}$

dans $\mathbf{x} = \lambda(\theta^\omega(0))$

$$a0110010010011011001b$$

$$\uparrow \lambda$$

dans $\mathbf{y} = \theta^\omega(0)$

$$c002d$$

- 002 est *l'antécédent* de 0110010010011011001 pour λ
- 0110010010011011001 est <u>une</u> *image étendue* de 002 par λ

De graphes d'extensions en graphes d'extensions

Soit $x = \sigma(y)$ où σ est un morphisme de retour pour w.

- A tout facteur de x ayant une occurrence de w, on associe un facteur de y : son *antécédent*.
- A tout facteur de y, on associe les facteurs de x dont il est l'antécédent : ses *images étendues*.

De graphes d'extensions en graphes d'extensions

Soit $x = \sigma(y)$ où σ est un morphisme de retour pour w.

- A tout facteur de x ayant une occurrence de w, on associe un facteur de y : son *antécédent*.
- A tout facteur de y, on associe les facteurs de x dont il est l'antécédent : ses *images étendues*.

Proposition

Le graphe d'extensions d'un facteur v de x dépend uniquement

- *du graphe d'extensions de l'antécédent de v (et de σ),*
- *ou de σ si v n'a pas d'occurrence de w.*

Et le caractère dendrique dans tout ça ?

Soit $x = \sigma(y)$ où σ est un morphisme de retour pour w.

Proposition

Si un facteur u de y est dendrique, alors ses images étendues sont dendriques si et seulement si

- $\mathbf{L}_\sigma$ *pour toute paire $\{a, b\}$ d'extensions à gauche de u, si s est suffixe de $\sigma(a)$ et $\sigma(b)$, alors a et b sont reliés par un chemin où s est suffixe de $\sigma(c)$ pour tout sommet de gauche c,*
- $\mathbf{R}_\sigma$ *pour toute paire $\{a, b\}$ d'extensions à droite de u, si p est préfixe de $\sigma(a)w$ et $\sigma(b)w$, alors a et b sont reliés par un chemin où p est préfixe de $\sigma(c)w$ pour tout sommet de droite c.*

Et le caractère dendrique dans tout ça ?

Soit $x = \sigma(y)$ où σ est un morphisme de retour pour w.

Proposition

Si un facteur u de y est dendrique, alors ses images étendues sont dendriques si et seulement si

- $\mathbf{L}_\sigma$ *pour toute paire $\{a, b\}$ d'extensions à gauche de u, si s est suffixe de $\sigma(a)$ et $\sigma(b)$, alors a et b sont reliés par un chemin où s est suffixe de $\sigma(c)$ pour tout sommet de gauche c,*
- $\mathbf{R}_\sigma$ *pour toute paire $\{a, b\}$ d'extensions à droite de u, si p est préfixe de $\sigma(a)w$ et $\sigma(b)w$, alors a et b sont reliés par un chemin où p est préfixe de $\sigma(c)w$ pour tout sommet de droite c.*

Et le caractère dendrique dans tout ça ?

Soit $x = \sigma(y)$ où σ est un morphisme de retour pour w.

Proposition

Si un facteur u de y est dendrique, alors ses images étendues sont dendriques si et seulement si

- $\mathbf{L}_\sigma$ *pour toute paire $\{a, b\}$ d'extensions à gauche de u, si s est suffixe de $\sigma(a)$ et $\sigma(b)$, alors a et b sont reliés par un chemin où s est suffixe de $\sigma(c)$ pour tout sommet de gauche c,*
- $\mathbf{R}_\sigma$ *pour toute paire $\{a, b\}$ d'extensions à droite de u, si p est préfixe de $\sigma(a)w$ et $\sigma(b)w$, alors a et b sont reliés par un chemin où p est préfixe de $\sigma(c)w$ pour tout sommet de droite c.*

Petite observation...

Soient σ un morphisme de retour et a, b des lettres de y.

Si un facteur u de y est dendrique, alors

- a et b ne sont pas tous les deux extensions à gauche de u
  $\rightarrow$ les éléments de $u\mathcal{A}^*$ satisfont $\mathbf{L}_\sigma$ pour $\{a, b\}$

Petite observation...

Soient σ un morphisme de retour et a, b des lettres de y.

Si un facteur u de y est dendrique, alors

- a et b ne sont pas tous les deux extensions à gauche de u
  $\rightarrow$ les éléments de $u\mathcal{A}^*$ satisfont $\mathbf{L}_\sigma$ pour $\{a, b\}$
- a et b sont reliés par un chemin de longueur > 2
  $\rightarrow$ les éléments de $u\mathcal{A}^+$ satisfont $\mathbf{L}_\sigma$ pour $\{a, b\}$

Petite observation...

Soient σ un morphisme de retour et a, b des lettres de y.

Si un facteur u de y est dendrique, alors

- a et b ne sont pas tous les deux extensions à gauche de u
  $\rightarrow$ les éléments de $u\mathcal{A}^*$ satisfont $\mathbf{L}_\sigma$ pour $\{a, b\}$
- a et b sont reliés par un chemin de longueur > 2
  $\rightarrow$ les éléments de $u\mathcal{A}^+$ satisfont $\mathbf{L}_\sigma$ pour $\{a, b\}$
- a et b sont reliés par un chemin de longueur 2
  $\rightarrow$ u satisfait $\mathbf{L}_\sigma$ pour $\{a, b\}$ et il existe un unique c tel que les éléments de $uc\mathcal{A}^*$ pourraient ne pas le satisfaire

Petite observation...

Soient σ un morphisme de retour et a, b des lettres de y.

Si un facteur u de y est dendrique, alors

- a et b ne sont pas tous les deux extensions à gauche de u
  $\rightarrow$ les éléments de $u\mathcal{A}^*$ satisfont $\mathbf{L}_\sigma$ pour $\{a, b\}$
- a et b sont reliés par un chemin de longueur > 2
  $\rightarrow$ les éléments de $u\mathcal{A}^+$ satisfont $\mathbf{L}_\sigma$ pour $\{a, b\}$
- a et b sont reliés par un chemin de longueur 2
  $\rightarrow$ u satisfait $\mathbf{L}_\sigma$ pour $\{a, b\}$ et il existe un unique c tel que les éléments de $uc\mathcal{A}^*$ pourraient ne pas le satisfaire

Proposition

Si les facteurs de y dans $u\mathcal{A}^*$ sont dendriques, alors il en existe au plus un qui ne satisfait pas $\mathbf{L}_\sigma$ pour $\{a, b\}$.

... grandes conséquences (1)

Soit $x = \sigma(y)$ où σ est un morphisme de retour pour w.

Proposition

Si y est ultimement dendrique, alors il n'y a qu'un nombre fini de ses facteurs qui ne satisfont pas $\mathbf{L}_\sigma$ ou $\mathbf{R}_\sigma$.

... grandes conséquences (1)

Soit $x = \sigma(y)$ où σ est un morphisme de retour pour w.

Proposition

Si y est ultimement dendrique, alors il n'y a qu'un nombre fini de ses facteurs qui ne satisfont pas $\mathbf{L}_\sigma$ ou $\mathbf{R}_\sigma$.

Corollaire

$$y \text{ ult. dendrique} \implies x \text{ ult. dendrique}$$

… grandes conséquences (1)

Soit $x = \sigma(y)$ où σ est un morphisme de retour pour w.

Proposition

Si y est ultimement dendrique, alors il n'y a qu'un nombre fini de ses facteurs qui ne satisfont pas $\mathbf{L}_\sigma$ ou $\mathbf{R}_\sigma$.

Proposition (stabilité par dérivation)

Si x est ultimement dendrique de seuil N, alors y est ultimement dendrique de seuil $\leq \max\{0, N-1\}$.

Corollaire

$$y \text{ ult. dendrique } \Longrightarrow x \text{ ult. dendrique}$$

... grandes conséquences (1)

Soit $x = \sigma(y)$ où σ est un morphisme de retour pour w.

Proposition

Si y est ultimement dendrique, alors il n'y a qu'un nombre fini de ses facteurs qui ne satisfont pas $\mathbf{L}_\sigma$ ou $\mathbf{R}_\sigma$.

Proposition (stabilité par dérivation)

Si x est ultimement dendrique de seuil N, alors y est ultimement dendrique de seuil $\leq \max\{0, N-1\}$.

Corollaire

$$y \text{ ult. dendrique} \iff x \text{ ult. dendrique}$$

… grandes conséquences (1)

Soit $x = \sigma(y)$ où σ est un morphisme de retour pour w.

Proposition

Si y est ultimement dendrique, alors il n'y a qu'un nombre fini de ses facteurs qui ne satisfont pas $\mathbf{L}_\sigma$ ou $\mathbf{R}_\sigma$.

Proposition (stabilité par dérivation)

Si x est ultimement dendrique de seuil N, alors y est ultimement dendrique de seuil $\leq \max\{0, N-1\}$.

Corollaire

$$y \text{ ult. dendrique } \iff x \text{ ult. dendrique}$$

$\mathbf{x} = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\theta}^\omega(0))$ ultimement dendrique

... grandes conséquences (1)

Soit $x = \sigma(y)$ où σ est un morphisme de retour pour w.

Proposition

Si y est ultimement dendrique, alors il n'y a qu'un nombre fini de ses facteurs qui ne satisfont pas $\mathbf{L}_\sigma$ ou $\mathbf{R}_\sigma$.

Proposition (stabilité par dérivation)

Si x est ultimement dendrique de seuil N, alors y est ultimement dendrique de seuil $\leq \max\{0, N-1\}$.

Corollaire

$$y \text{ ult. dendrique} \iff x \text{ ult. dendrique}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{x} = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\theta}^\omega(0)) \text{ ultimement dendrique} \\ \iff & \mathbf{y} = \boldsymbol{\theta}^\omega(0) \text{ ultimement dendrique} \end{aligned}$$

... grandes conséquences (1)

Soit $x = \sigma(y)$ où σ est un morphisme de retour pour w.

Proposition

Si y est ultimement dendrique, alors il n'y a qu'un nombre fini de ses facteurs qui ne satisfont pas $\mathbf{L}_\sigma$ ou $\mathbf{R}_\sigma$.

Proposition (stabilité par dérivation)

Si x est ultimement dendrique de seuil N, alors y est ultimement dendrique de seuil $\leq \max\{0, N-1\}$.

Corollaire

$$y \text{ ult. dendrique} \iff x \text{ ult. dendrique}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{x} = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\theta}^\omega(0)) \text{ ultimement dendrique} \\ \iff & \mathbf{y} = \boldsymbol{\theta}^\omega(0) \text{ dendrique} \end{aligned}$$

… grandes conséquences (1)

Soit $x = \sigma(y)$ où σ est un morphisme de retour pour w.

Proposition

Si y est ultimement dendrique, alors il n'y a qu'un nombre fini de ses facteurs qui ne satisfont pas $\mathbf{L}_\sigma$ ou $\mathbf{R}_\sigma$.

Proposition (stabilité par dérivation)

Si x est ultimement dendrique de seuil N, alors y est ultimement dendrique de seuil $\leq \max\{0, N-1\}$.

Corollaire

$$y \text{ ult. dendrique} \iff x \text{ ult. dendrique}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{x} = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\theta}^\omega(0)) \text{ ultimement dendrique} \\ \iff & \mathbf{y} = \boldsymbol{\theta}^\omega(0) \text{ dendrique} \\ \iff & \text{les “petits” facteurs de } \mathbf{y} \text{ sont dendriques} \\ & \text{et les facteurs de } \mathbf{y} \text{ satisfont } \mathbf{L}_\theta \text{ et } \mathbf{R}_\theta \end{aligned}$$

Retour à l'exemple

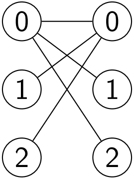
$$\theta : \begin{cases} 0 \mapsto 01002\,0100 \\ 1 \mapsto 0100201\,0100 \\ 2 \mapsto 01002010201\,0100 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\theta} : \begin{cases} 0 \mapsto 0100\color{gray}{2}0100 \\ 1 \mapsto 0100201\color{gray}{0100} \\ 2 \mapsto 01002010201\color{gray}{0100} \end{cases}$$

Facteurs bispéciaux sans 0100 :

ε

ε

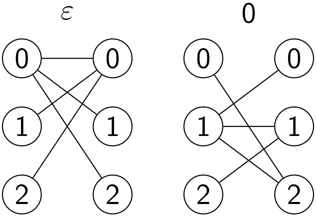


Retour à l'exemple

$$\boldsymbol{\theta} : \begin{cases} 0 \mapsto 0100\,2\,\textcolor{gray}{0100} \\ 1 \mapsto 0100\,2\,01\,\textcolor{gray}{0100} \\ 2 \mapsto 0100\,2\,01\,02\,01\,\textcolor{gray}{0100} \end{cases}$$

Facteurs bispéciaux sans 0100 :

$\varepsilon, 0$

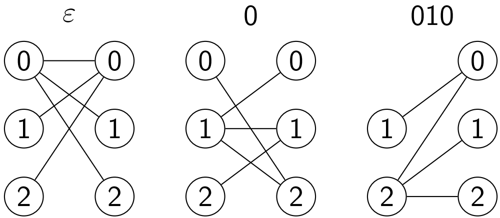


Retour à l'exemple

$$\boldsymbol{\theta}: \begin{cases} 0 \mapsto 010020100 \\ 1 \mapsto 01002010100 \\ 2 \mapsto 010020102010100 \end{cases}$$

Facteurs bispéciaux sans 0100 :

$\varepsilon, 0, 010$

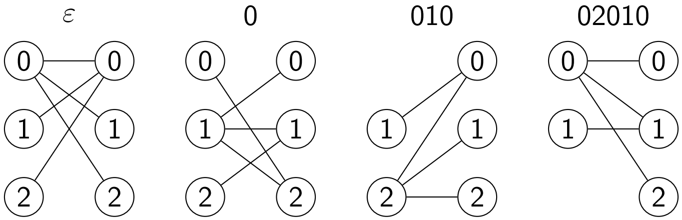


Retour à l'exemple

$$\theta : \begin{cases} 0 \mapsto 010020100 \\ 1 \mapsto 0100201 0100 \\ 2 \mapsto 01002010201 0100 \end{cases}$$

Facteurs bispéciaux sans 0100 :

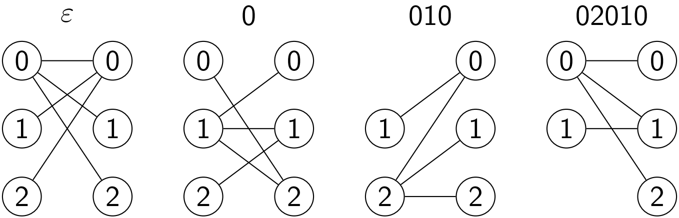
$\varepsilon, 0, 010, 02010$



$$\boldsymbol{\theta} : \begin{cases} 0 \mapsto 01002\textcolor{gray}{0100} \\ 1 \mapsto 0100201\textcolor{gray}{0100} \\ 2 \mapsto 01002010201\textcolor{gray}{0100} \end{cases}$$

Facteurs bispéciaux sans 0100 :

$\varepsilon, 0, 010, 02010, \cancel{01002010}$



Les conditions $\mathbf{L}_\sigma$ et $\mathbf{R}_\sigma$

Soit $y = \sigma^\omega(a)$ où σ est un morphisme de retour pour w.

Si on note

- F_0 l'ensemble des facteurs de y sans occurrence de w,
- F_{i+1} l'union de F_i et des images étendues de ses éléments,

alors

Proposition

Le mot y est dendrique si et seulement si

- *les éléments de F_0 sont dendriques,*
- *pour tout i, les éléments de F_i satisfont $\mathbf{L}_\sigma$ et $\mathbf{R}_\sigma$.*

… grandes conséquences (2)

Soit $x = \sigma(y)$ où σ est un morphisme de retour.

Définition

Soit F un ensemble factoriel de facteurs dendriques de y. Le graphe G_F^L a

- pour sommets les lettres de y,
- une arête entre a et b si, pour tout $u \in F$ ayant a et b comme extensions à gauche, a et b sont reliés par un chemin de longueur 2.

... grandes conséquences (2)

Soit $x = \sigma(y)$ où σ est un morphisme de retour.

Définition

Soit F un ensemble factoriel de facteurs dendriques de y. Le graphe G_F^L a

- pour sommets les lettres de y,
- une arête entre a et b si, pour tout $u \in F$ ayant a et b comme extensions à gauche, a et b sont reliés par un chemin de longueur 2.

Proposition

Les éléments de F satisfont $\mathbf{L}_\sigma$ si et seulement si, pour tous sommets a, b de G_F^L, si s est un suffixe de $\sigma(a)$ et $\sigma(b)$, alors a et b sont reliés par un chemin où s est suffixe de $\sigma(c)$ pour tout sommet c.

Quand tout s'emboîte

Soit $y = \sigma^\omega(a)$ où σ est un morphisme de retour pour w.

- Comme $F_i \subseteq F_{i+1}$, $G^L_{F_{i+1}}$ est un sous-graphe de $G^L_{F_i}$ et $G^R_{F_{i+1}}$ est un sous-graphe de $G^R_{F_i}$.

Quand tout s'emboîte

Soit $y = \sigma^\omega(a)$ où σ est un morphisme de retour pour w.

- Comme $F_i \subseteq F_{i+1}$, $G^L_{F_{i+1}}$ est un sous-graphe de $G^L_{F_i}$ et $G^R_{F_{i+1}}$ est un sous-graphe de $G^R_{F_i}$.
- Si les éléments de F_{i+1} sont dendriques, on peut calculer $G^L_{F_{i+1}}$ à partir de $G^L_{F_i}$ et $G^R_{F_{i+1}}$ à partir de $G^R_{F_i}$.

Quand tout s'emboîte

Soit $y = \sigma^\omega(a)$ où σ est un morphisme de retour pour w.

- Comme $F_i \subseteq F_{i+1}$, $G^L_{F_{i+1}}$ est un sous-graphe de $G^L_{F_i}$ et $G^R_{F_{i+1}}$ est un sous-graphe de $G^R_{F_i}$.
- Si les éléments de F_{i+1} sont dendriques, on peut calculer $G^L_{F_{i+1}}$ à partir de $G^L_{F_i}$ et $G^R_{F_{i+1}}$ à partir de $G^R_{F_i}$.

Proposition

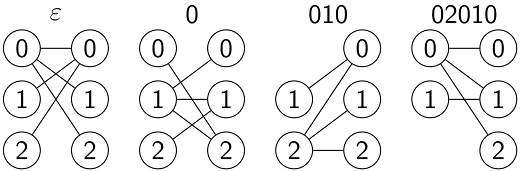
Le mot y est dendrique si et seulement si

- *les éléments de F_0 sont dendriques,*
- *pour tout i, $G^L_{F_i}$ satisfait $\mathbf{L}_\sigma$ tant que $G^L_{F_i} \neq G^L_{F_{i-1}}$,*
- *pour tout i, $G^R_{F_i}$ satisfait $\mathbf{R}_\sigma$ tant que $G^R_{F_i} \neq G^R_{F_{i-1}}$.*

La fin du suspens

Pour $\mathbf{y} = \theta^\omega(0)$ avec

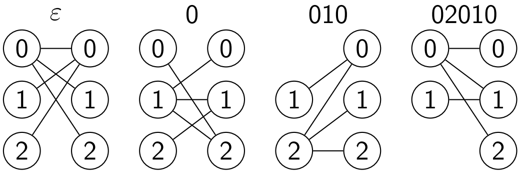
$$\theta : \begin{cases} 0 \mapsto 010020100 \\ 1 \mapsto 010020100100 \\ 2 \mapsto 010020102010100 \end{cases}$$



La fin du suspens

Pour $\mathbf{y} = \boldsymbol{\theta}^{\omega}(0)$ avec

$$\boldsymbol{\theta} : \begin{cases} 0 \mapsto 01002\,0100 \\ 1 \mapsto 0100201\,0100 \\ 2 \mapsto 0100201020\,10100 \end{cases}$$

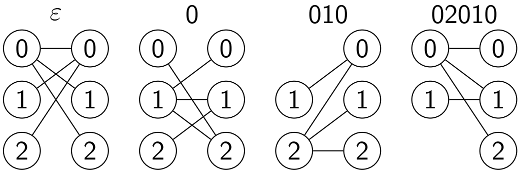


- les facteurs sans occurrence de 0100 sont dendriques

La fin du suspens

Pour $\mathbf{y} = \boldsymbol{\theta}^{\omega}(0)$ avec

$$\boldsymbol{\theta} : \begin{cases} 0 \mapsto 01002\textcolor{gray}{0100} \\ 1 \mapsto 0100201\textcolor{gray}{0100} \\ 2 \mapsto 010020102010\textcolor{gray}{0100} \end{cases}$$

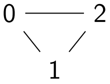


- les facteurs sans occurrence de 0100 sont dendriques

$G^L_{F_0}$

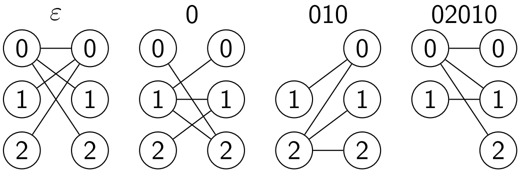
$0 — 1 — 2$

$G^R_{F_0}$



Pour $\mathbf{y} = \boldsymbol{\theta}^{\omega}(0)$ avec

$$\boldsymbol{\theta} : \begin{cases} 0 \mapsto 01002\,0100 \\ 1 \mapsto 01002010\,0100 \\ 2 \mapsto 01002010201\,0100 \end{cases}$$

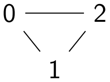


- les facteurs sans occurrence de 0100 sont dendriques
- $G^L_{F_0}$ satisfait $\mathbf{L}_{\boldsymbol{\theta}}$ et $G^R_{F_0}$ satisfait $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}}$

$G^L_{F_0}$

0 — 1 — 2

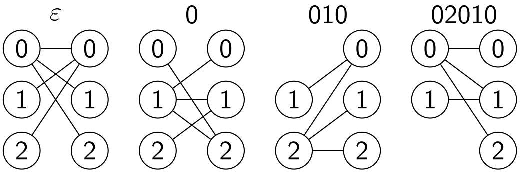
$G^R_{F_0}$



La fin du suspens

Pour $\mathbf{y} = \theta^{\omega}(0)$ avec

$$\theta : \begin{cases} 0 \mapsto 0100\color{gray}{20100} \\ 1 \mapsto 010020\color{gray}{10100} \\ 2 \mapsto 0100201020\color{gray}{10100} \end{cases}$$



- les facteurs sans occurrence de 0100 sont dendriques
- $G^L_{F_0}$ satisfait $\mathbf{L}_\theta$ et $G^R_{F_0}$ satisfait $\mathbf{R}_\theta$
- $G^L_{F_1} = G^L_{F_0}$ et $G^R_{F_1} = G^R_{F_0}$

$G^L_{F_0}$

0 — 1 — 2

$G^R_{F_0}$

0 —— 2

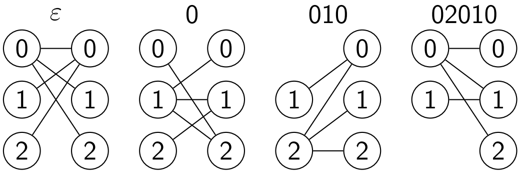
\ /

1

La fin du suspens

Pour $\mathbf{y} = \theta^\omega(0)$ avec

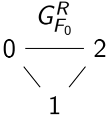
$$\theta : \begin{cases} 0 \mapsto 01002\,0100 \\ 1 \mapsto 0100201\,0100 \\ 2 \mapsto 01002010201\,0100 \end{cases}$$



- les facteurs sans occurrence de 0100 sont dendriques
- $G^L_{F_0}$ satisfait $\mathbf{L}_\theta$ et $G^R_{F_0}$ satisfait $\mathbf{R}_\theta$
- $G^L_{F_1} = G^L_{F_0}$ et $G^R_{F_1} = G^R_{F_0}$

$G^L_{F_0}$

0 — 1 — 2



y est dendrique

donc **x** est ultimement dendrique

Un outil bien plus puissant

Définition

Une *représentation S-adique* de x est une suite $(\sigma_i, a_i)_{i \geq 0}$ telle que

$$x = \lim_{n \to \infty} \sigma_0 \dots \sigma_n(a_n).$$

Un outil bien plus puissant

Définition

Une *représentation S-adique* de x est une suite $(\sigma_i, a_i)_{i \geq 0}$ telle que

$$x = \lim_{n \to \infty} \sigma_0 \dots \sigma_n(a_n).$$

Exemples de familles ayant une caractérisation S-adique :

- Sturmiens
- Arnoux-Rauzy [Arnoux–Rauzy, Justin–Pirillo]
- linéairement récurrents [Durand]
- complexité au plus linéaire [Espinoza]

Un dernier résultat

Théorème

Si (σ_i, a_i) *est une représentation* S*-adique primitive de* x *où les* σ_i *sont des morphismes de retour dans un ensemble* $\mathfrak{S}$*, alors il existe un graphe* $\mathcal{G}$ *tel que*

1. x *est dendrique si et seulement si* $(\sigma_i)_{i\geq 0}$ *étiquette un chemin infini dans* $\mathcal{G}$ *;*
2. x *est ultimement dendrique si et seulement si il existe* N *tel que* $(\sigma_i)_{i\geq N}$ *étiquette un chemin infini dans* $\mathcal{G}$*.*

De plus, si $\mathfrak{S}$ *est fini, alors* $\mathcal{G}$ *est constructible.*

Fin

Merci pour votre attention !

En bref

Pour décider du caractère (ultimement) dendrique de $x = \tau(\sigma^\omega(a))$:

1. on trouve des morphismes de retour tels que $x = \lambda(\theta^\omega(0))$,
2. on regarde les graphes d'extensions des facteurs (internes) bispéciaux de $\theta(\mathcal{A})w_\theta$,
   $\rightarrow$ si pas dendriques, alors x **n'est pas ult. dendrique**
3. on construit $G^L_{F_0}$ et $G^R_{F_0}$,
4. on regarde s'ils satisfont $\mathbf{L}_\theta$ et $\mathbf{R}_\theta$,
   $\rightarrow$ si non, alors x **n'est pas ult. dendrique**
5. on en déduit $G^L_{F_{i+1}}$ et $G^R_{F_{i+1}}$,
6. s'ils sont différents de $G^L_{F_i}$ et $G^R_{F_i}$, on retourne au point 4,
   $\rightarrow$ sinon, x **est ult. dendrique**
7. on regarde si $G^L_{F_i}$ et $G^R_{F_i}$ satisfont $\mathbf{L}_\lambda$ et $\mathbf{R}_\lambda$ et si les facteurs (internes) bispéciaux de $\lambda(\mathcal{A})w_\lambda$ sont dendriques
   $\rightarrow$ si oui, x **est dendrique**