SUR LES TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES INVOLUTIVES QUI MUTENT EN ELLES-MÊMES LES DROITES D'UNE CONGRUENCE

PAR

LUCIEN GODEAUX

Candidat en sciences physiques et mathématiques
de l'Université de Liège

Extrait des Mémoires et Publications
de la Société des Sciences, des Arts et des Lettres
du Hainaut
VII^e série, tome I, 61^e volume

MONS
IMPRIMERIE DEQUESNE-MASQUILLIER ET FILS
1910

SUR LES
TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES
INVOLUTIVES
QUI MUTENT EN ELLES-MÊMES
LES DROITES D'UNE CONGRUENCE

PAR

Lucien GODEAUX

Candidat en sciences physiques et mathématiques de l'Université de Liège

---

Dans une note récente[1], j'ai étudié les différents types de transformations birationnelles involutives du plan, par une méthode élémentaire. Cette même méthode me permet d'aborder la recherche des variétés de transformations birationnelles involutives de l'espace dont les couples de points correspondants sont situés sur les droites d'une congruence.

1. — Soit Ψ une transformation birationnelle involutive de l'espace dont les couples de points correspondants sont situés sur les droites d'une congruence Γ.

Sur une droite de Γ se trouvent évidemment une infinité de couples de points de Ψ, et comme cette transformation

[1] *Sur les transformations birationnelles involutives du plan.* Bull. de l'Acad. roy. de Belgique (classe des sciences), 1911, pp. 217-227.

est birationnelle, un point d'une droite donnée n'appartient qu'à un seul couple et ceux-ci forment une involution binaire I_2^1.

On établit de même que la congruence Γ est nécessairement linéaire. De plus, tout point singulier de cette congruence est principal pour la transformation Ψ.

Lorsque les couples de points correspondants d'une transformation birationnelle involutive se répartissent sur les droites d'une congruence, celle-ci est linéaire et chacun de ses points singuliers est principal pour la transformation.

2. — Imaginons un faisceau de quadriques ω dont les éléments découpent sur une droite d de Γ l'involution binaire I_2^1 déterminée par la congruence Ψ ; on sait qu'il est toujours possible de trouver un pareil faisceau. Lorsque la droite d décrit la congruence Γ, on obtient ∞^2 faisceaux ω.

Quatre cas peuvent se présenter :

a) Les ∞^2 faisceaux ω coïncident en un seul faisceau Ω_1.

b) Ω_2 étant une variété doublement infinie de quadriques se groupant en ∞^1 faisceaux, chacun de ceux-ci est la coïncidence de ∞^1 faisceaux ω.

c) Les quadriques des ∞^2 faisceaux ω forment un système doublement infini Ω_3.

d) Les quadriques des ∞^2 faisceaux ω forment un système triplement infini Ω_4.

Chacun de ces cas fournit un type particulier de transformations Ψ ; nous répartirons donc celles-ci en quatre classes que nous étudierons successivement.

3. — *Transformations de la première classe.* — Nous citerons ces transformations pour être complet.

Une transformation de la première classe est déterminée par les intersections des droites d'une congruence linéaire et des quadriques d'un faisceau. Les lignes principales sont les lignes singulières de la congruence et la courbe-base du faisceau.

4. — *Transformations de la seconde classe.* — Un faisceau ω de la variété Ω_2 correspond à une infinité de droites de Γ formant une surface réglée R d'ordre n. Les surfaces R forment un faisceau. Soit, en effet, P un point générique de l'espace. Par P passe une seule droite de Γ ; cette droite détermine un seul faisceau ω de Ω_2 et celui-ci une seule surface R passant par P.

La transformation est donc établie par une correspondance biunivoque entre les surfaces réglées R d'un faisceau et les faisceaux ω de Ω_2.

Considérons une surface R et le faisceau ω correspondant. Ce dernier a une courbe-base (décomposée ou non) du quatrième ordre. Cette courbe rencontre R en $4\,n$ points et ceux-ci sont évidemment principaux pour la transformation Ψ. Le lieu de ces points est une courbe C, d'ordre m, rencontrant R en $4\,n$ points variables et s'appuyant par conséquent en $n\,(m - 4)$ points sur la courbe-base du faisceau des surfaces R. Cette courbe-base se compose des directrices de la congruence Γ et d'un certain nombre de droites de cette congruence. Ces dernières sont évidemment aussi des lignes principales de la transformation Ψ.

Une transformation de la seconde classe s'obtient en rapportant projectivement les faisceaux de quadriques d'une variété doublement infinie de quadriques comprenant ∞^1 faisceaux, et les surfaces réglées d'un faisceau, les droites de ces surfaces engendrant une congruence linéaire. Les lignes principales sont les courbes-base du faisceau de surfaces réglées et une courbe d'ordre m *s'appuyant en* n (m — 4) *points sur ces courbes-base.*

5. — *Transformations de la troisième classe.* — Deux faisceaux ω du système doublement infini Ω_3 ont en commun une seule quadrique et celle-ci varie évidemment avec les faisceaux, Ω_3 est donc un réseau.

A chaque faisceau ω du réseau Ω_3 correspondent des droites de la congruence Γ en nombre fini n.

Les quadriques d'un faisceau ω ont en commun une quartique gauche Q (éventuellement dégénérée en une partie fixe et en une partie mobile). Ces courbes Q forment évidemment une gerbe. Entre les droites de Γ et les quartiques Q, passe une correspondance d'indices $(n, 1)$. Un point P, situé à la fois sur une droite de Γ et une courbe Q se correspondant, est nécessairement un point principal de la transformation Ψ. Le lieu de ces points est une courbe C dont nous rechercherons l'ordre en utilisant le principe de correspondance de M. Zeuthen.

Nous ferons les suppositions suivantes :

a) Aux droites de Γ s'appuyant sur une droite quelconque, correspondent des courbes Q formant une surface d'ordre ν.

b) Les courbes Q se scindent en une partie fixe Q_0 d'ordre γ et en une partie mobile Q_1 d'ordre $4 - \gamma$ ($\gamma \leqslant 3$).

Soit π un plan générique de l'espace. Par un point x de ce plan passe une droite de Γ, la courbe Q_1 qui lui correspond marque sur π, $4 - \gamma$ points X_2. Inversement, à un point X_2 correspondent n points X_1 ; de plus, quand X_1 décrit une droite, X_2 décrit une courbe d'ordre ν. Par suite, les points X_1, X_2 présentent, d'après le principe de M. Zeuthen, $4 + n + \nu - \gamma$ coïncidences. Une de ces coïncidences étant un point de C, cette courbe est d'ordre $4 + n + \nu$, ou $3 + n + \nu$, ou encore $2 + n + \nu$, ou enfin $1 + n + \nu$. La courbe Q_0 est évidemment principale pour Ψ.

Remarquons enfin qu'une droite de Γ principale pour la correspondance établie entre ces droites et les faisceaux ω de Ω_3, est aussi principale pour la transformation Ψ.

Une transformation de la troisième classe s'obtient en établissant une correspondance (1, n) *entre les faisceaux d'un réseau de quadriques et les droites d'une congruence linéaire. Les lignes principales sont les droites de la congruence principales pour la correspondance* (1, n), *les lignes singulières de la congruence, la courbe-base d'ordre* γ ($\leqslant 3$) *du réseau et enfin une courbe* *d'ordre* $4 + n + \nu - \gamma$, ν *étant l'ordre de la surface engendrée par les bases des faisceaux correspondants aux droites de la congruence s'appuyant sur une droite fixe.*

6. — *Transformations de la quatrième classe.* — Le système triplement infini Ω_4 contient une double infinité de faisceaux de quadriques ; par suite, une quadrique de ce système appartient généralement à un nombre fini de faisceaux. Ce nombre est du reste nécessairement égal à l'unité, car autrement la transformation Ψ ne serait pas birationnelle.

Remarquons maintenant que toute couple de points de l'espace se trouve sur les quadriques d'un système linéaire triplement infini, nous pourrons donc nous arranger de manière à ce que Ω_3 soit linéaire. Tous les systèmes ∞^2 de faisceaux tels qu'une quadrique appartienne à un seul faisceau, sont connus ; ce sont les systèmes analogues aux congruences linéaires de droites de l'espace.

Un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent conduit à ce théorème.

Une transformation de la quatrième classe s'obtient en établissant une correspondance (1, n) *entre les droites d'une congruence linéaire et les faisceaux d'une congruence linéaire de faisceaux d'un système linéaire triplement infini. Les lignes principales sont les droites principales pour la correspondance* (1, n), *les lignes singulières de la congruence de droites, une courbe d'ordre* $4 + n + \nu - \gamma$ $(\gamma \leqq 2)$, ν *étant l'ordre du lieu des bases des faisceaux correspondants aux droites, de la congruence s'appuyant sur une droite, et enfin la courbe-base éventuelle d'ordre* γ *du système de quadriques.*

Liège, 16 octobre 1910.