Sur un complexe de coniques de caractéristiques un et quatre (*); par Lucien Godeaux, candidat en sciences physiques et mathématiques de l'Université de Liége.

Dans la note suivante, j'étudie un complexe de coniques de caractéristiques un et quatre. Je rappelle que ces caractéristiques, dont la définition est due à M. Montesano (**), sont :

1° *Le nombre* α *des coniques du complexe situées dans un plan quelconque de l'espace;*

2° *La classe* β *du cône formé par les plans des coniques du complexe passant par un point générique de l'espace.*

L'objet principal de cette étude est la détermination de la classe de la surface enveloppée par les plans des coniques dégénérées du complexe et la recherche des caractères de cette surface. Dans le cas actuel, elle dégénère en cinq quadriques et une surface de quatrième classe. Les droites qui forment les coniques dégénérées forment certaines congruences dont je recherche l'ordre.

Enfin je recherche l'ordre que peut avoir une congruence de classe donnée, formée avec les coniques du complexe.

1. — Soient donnés dans l'espace trois complexes linéaires de droites non spéciaux Φ_1, Φ_2, Φ_3 et deux

(*) Extrait des *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), nos 9-10, pp. 725-737, 1910.

(**) *Una estensione del problema della proiettività a gruppi di complessi e di congruenze lineari di rette.* (ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA, 1898, s. (3), t. I, pp. 313-358.)

congruences bilinéaires de droites non dégénérées G_1, G_2. Ces cinq données sont de plus indépendantes l'une de l'autre.

Dans un plan π de l'espace, les complexes Φ_1, Φ_2, Φ_3 déterminent des faisceaux de rayons φ_1, φ_2, φ_3, et les congruences G_1, G_2 déterminent généralement deux droites g_1, g_2 (exceptionnellement, le plan π contiendra ∞^1 droites de l'une des congruences). Il y a ∞^1 triangles dont les côtés appartiennent respectivement aux faisceaux φ_1, φ_2, φ_3 et dont deux des sommets décrivent respectivement les droites g_1, g_2; d'après le théorème classique de Mac-Laurin et Braikenridge, les troisièmes sommets de ces ∞^1 triangles se trouvent sur une conique ε passant par les sommets des faisceaux φ_1, φ_2 et par le point commun aux droites g_1, g_2.

Lorsque le plan π varie, on obtient ∞^3 coniques ε formant un complexe Σ; d'après la construction précédente, un plan π ne contient généralement qu'une conique de Σ, donc :

La caractéristique α du complexe Σ est égale à l'unité.

2. — Soit d une droite de l'espace n'appartenant ni aux complexes ni aux congruences données. Désignons par d_1, d_2, d_3 les conjuguées de la droite d par rapport aux complexes Φ_1, Φ_2, Φ_3 et par R_1 R_2 les quadriques formées par les droites des congruences G_1, G_2 s'appuyant sur d.

Les coniques ε situées dans les plans passant par d engendrent une surface Δ d'ordre $\beta + 2$. D'après le § 1, un point de cette surface est évidemment fourni par le troisième sommet d'un triangle dont les côtés s'appuient respectivement sur les couples de droites d, d_1; d, d_2;

d, d_3, et dont deux sommets appartiennent respectivement aux quadriques R_1, R_2. Nous obtiendrons aisément l'ordre de la surface Δ par une simple application du principe de Chasles : Considérons une droite x arbitraire support commun de deux ponctuelles (X_1), (X_2). Entre ces ponctuelles, nous établissons la correspondance suivante : Par un point X_1 de la première, menons la droite s'appuyant sur d, d_1, et par le point de rencontre de cette droite avec R_1 en dehors de d, menons les droites s'appuyant sur d_3. Celles-ci forment un plan rencontrant R_2 suivant une conique rencontrant d; les droites qui s'appuient sur cette conique et sur les droites d, d_1, x en des points distincts sont au nombre de trois et déterminent sur x trois points X_2. Inversement, à un point X_2 correspondent trois points X_1; une coïncidence des points X_1, X_2 étant un point de la surface Δ, celle-ci est d'ordre six.

La caractéristique β du complexe Σ est égale à quatre.

3. — Envisageons les positions particulières que peut occuper la droite d par rapport à Φ_1, Φ_2, Φ_3, G_1, G_2 et ce que devient la surface Δ dans ces différents cas.

Supposons en premier lieu que d soit l'une des directrices de la congruence G_1. Chaque plan π mené par d contient un faisceau de droites de G_1 et, par conséquent, ∞^1 coniques du complexe Σ. Ces coniques forment un faisceau; en effet, soit P un point de l'espace et π le plan déterminé par P et d; il existe un seul triangle dans le plan π dont les côtés appartiennent aux complexes Φ_1, Φ_2, Φ_3 et dont un sommet se trouve en P et un autre sur la droite de G_2 appartenant à π (cette dernière est unique, sans quoi les congruences G_1, G_2 ne seraient pas indépendantes). Le troisième sommet du triangle détermine un rayon de la congruence G_1 à l'aide duquel on construira la seule conique de Σ située dans π et passant par P. Ainsi chaque plan passant par d contient un faisceau de coniques de Σ. Ces coniques forment une congruence qui est évidemment d'ordre un et de classe nulle. Les courbes de cette congruence s'appuient évidemment sur les droites d_1, d_2 conjuguées de d respectivement par rapport aux complexes Φ_1, Φ_2.

Cherchons à construire une conique de la congruence définie plus haut passant par deux points arbitraires P_1, P_2 de la droite d. Projetons d_1 et d_2 de P_1 et désignons par d_3 la conjuguée de d par rapport à Φ_3, par R_2 la série réglée quadratique formée par les droites de G_2 s'appuyant sur d. Le plan (P_1, d_2) marque une conique sur R_2. Les droites qui s'appuient sur cette conique, sur d_3 et sur d marquent sur le plan (P_1, d_1) les points d'une cubique ayant un point double en P_1, soit C_1 cette courbe. En raisonnant sur P_2 comme on l'a fait sur P_1, on construira une cubique C_2 ayant un point double en P_2. Le nombre de coniques cherché est évidemment égal au nombre de droites de la congruence G_1 s'appuyant sur C_1 et C_2; si x est une telle droite, il est facile de voir qu'en effet le plan mené par d et x contient une conique de Σ passant par P_1 et P_2. On en conclut que par deux points quelconques de d passent quatre coniques de Σ et en particulier de la congruence définie plus haut. Par suite, les coniques de cette congruence passant par un point de d forment une surface du sixième ordre passant quatre fois par d et une fois par d_1 et d_2. Il est facile de voir que toutes ces surfaces ont en outre en commun une courbe C_{10} du dixième ordre s'appuyant huit fois sur d et six fois sur d_1 et sur d_2. Chaque conique de la congruence s'appuie deux fois sur la courbe C_{10}.

Le complexe Σ contient quatre congruences de coniques d'ordre un et de classe nulle formées par les coniques dont le plan passe par une des directrices de l'une des congruences G_1, G_2. Les coniques de l'une de ces congruences s'appuient sur les conjuguées de la directrice relative par rapport aux complexes Φ_1, Φ_2 et deux fois sur une courbe du dixième ordre rencontrant six fois ces conjuguées et huit fois la directrice.

4. — Supposons actuellement que la droite d appartienne à la congruence G_1. Relativement aux complexes Φ_1, Φ_2, Φ_3, elle peut occuper les positions suivantes :

1° Appartenir à Φ_1; les droites d forment alors une série réglée quadratique H_{11};

2° Appartenir à Φ_2 et former par conséquent une quadrique H_{12};

3° Appartenir à Φ_3 et former une quadrique H_{13}.

Considérons un plan π mené par une génératrice h_{11} de la quadrique H_{11}; on voit alors que la conique du complexe située dans ce plan dégénère en deux droites : l'une est la droite h_{11}, la seconde est une droite k_{11} appartenant au complexe Φ_2 et passant par l'intersection de la droite du plan π appartenant à Φ_1 et Φ_3 et de la droite de G_2 située dans ce plan. La droite k_{11} appartient à une congruence K_{11} contenue dans le complexe Φ_2.

Pour chercher l'ordre de la congruence K_{11}, considérons un point X et soit ζ le plan focal de ce point par rapport au complexe Φ_2. Les droites de k_{11} passant par X sont nécessairement situées dans le plan ζ, l'ordre de la congruence sera donc donné par le principe de Chasles. Menons une droite x_1 passant par X et située dans ζ; cette droite rencontre H_{11} en deux points et détermine deux génératrices h_{11}, h'_{11} de cette série réglée. Il existe deux points de ζ situés à la fois sur une génératrice de G_2 et sur une droite commune à Φ_1, Φ_3, ces deux droites s'appuyant soit sur h_{11}, soit sur h'_{11}. Par ces deux points, menons les droites x_2 passant par X. Inversement, à une droite x_2 correspondent six droites x_1; il y a huit coïncidences, donc la congruence K_{11} est d'ordre (et de classe) huit.

On remarque aisément que les coniques du complexe Σ situées dans les plans tangents à la quadrique H_{12} ne dégénèrent généralement pas.

Considérons une génératrice h_{13} de la série réglée H_{13}. La conique de Σ située dans un plan π passant par h_{13} dégénère en une droite appartenant aux complexes Φ_1, Φ_3 et en une droite du complexe Φ_2 passant par le point commun aux génératrices de G_1, G_2 situées dans π. La première de ces droites décrit la congruence L_{13} commune aux complexes Φ_1, Φ_2. La seconde décrit une congruence K_{13} située dans Φ_2.

L'application du principe de Chasles montre que l'ordre (et la classe) de la congruence K_{13} est égal à quatre.

Les plans tangents aux quadriques formées par les génératrices de la congruence G_1 *appartenant à* Φ_1 *ou à* Φ_3, *ou par les génératrices de* G_2 *appartenant à* Φ_2 *ou à* Φ_3, *contiennent des coniques dégénérées du complexe* Σ.

Les coniques situées dans les plans tangents à la première de ces surfaces dégénèrent en une génératrice de cette quadrique et en une droite appartenant à une congruence d'ordre et de classe huit contenue dans Φ_2; *celles qui sont* *situées dans les plans tangents à la seconde quadrique dégénèrent en une droite commune aux complexes* Φ_1, Φ_3 *et en une droite d'une congruence d'ordre et de classe quatre appartenant à* Φ_2.

5. — Désignons par F la série réglée quadratique formée par les droites appartenant à la fois aux trois complexes linéaires Φ_1, Φ_2, Φ_3. Soit π un plan passant par une génératrice f de F. La conique du complexe Σ située dans le plan π dégénère en la droite f et en une droite f_1 passant par l'intersection des droites de G_1, G_2 situées dans π. Le lien de cette droite f_1 est une congruence F_1 dont nous allons rechercher l'ordre et la classe.

Pour chercher l'ordre, remarquons que dans un plan passant par un point X, il ne peut y avoir qu'une droite de F_1 passant par ce point. L'ordre cherché sera donc égal au nombre de plans tangents à F, passant par un point X, et contenant une droite de la congruence passant par ce point. Cela reviendra à rechercher le nombre de génératrices f de F fournissant un tel plan. Soit x une des droites rencontrant toutes les génératrices f de F et (X_1), (X_2) deux ponctuelles ayant cette droite comme support commun. Par un point X_1, menons la génératrice f de F; dans le plan (X, f), menons les droites passant par X et appartenant respectivement aux complexes Φ_1, Φ_2. Par les points d'intersection de ces droites respectivement avec les droites de G_1, G_2 situées dans (X, f), menons une droite; celle-ci rencontre F en deux points et détermine deux génératrices marquant sur x deux points X_2. Inversement, par X_2, menons une génératrice f de F; par les points de rencontre de f respectivement avec les droites g_1, g_2 des congruences G_1, G_2, menons les droites appartenant respectivement à Φ_1, Φ_2. La droite qui joint le point de rencontre de ces deux dernières droites et celui des droites g_1, g_2 rencontre F en deux points et détermine deux génératrices de F et, par suite, deux points X_1 sur x. La correspondance entre les points X_1, X_2 a les indices (2, 2) et, par suite, la congruence F_1 est d'ordre quatre.

La classe se trouve de la même manière et est par conséquent égale à quatre.

Les plans tangents à la quadrique formée par les droites communes aux trois complexes Φ_1, Φ_2, Φ_3 contiennent des coniques dégénérées de Σ. Les droites qui forment ces coniques sont les génératrices de cette quadrique et les droites d'une congruence d'ordre et de classe quatre.

6. — Considérons un plan π tel que les droites g_1, g_2 de ce plan appartenant aux congruences G_1, G_2 et la droite commune aux complexes Φ_1, Φ_2 se rencontrent en un même point. La conique du complexe Σ située dans un tel plan π dégénère en la droite commune aux complexes Φ_1, Φ_2 et en une autre droite e. Cette droite e est déterminée par l'intersection de g_1 avec la droite commune à Φ_2 et Φ_3, et par l'intersection de g_2 avec la droite commune aux complexes Φ_1, Φ_3. Soient A_1, A_2 ces deux points.

Les plans π qui jouissent de la propriété indiquée enveloppent, d'après un théorème de M. Neuberg (*),

---

(*) *Sur les couples de triangles homologiques dont les sommets sont situés sur six droites données* (MATHESIS, 1903, 3e série, t. III, p. 105.)

une surface de la quatrième classe E. Le point commun aux droites g_1, g_2 décrit une surface du quatrième ordre.

Dans un plan touchant la surface E, le point A_1 est donné par l'intersection de la droite de la congruence G_1 et de la droite commune aux complexes Φ_2, Φ_3 situées dans ce plan. L'application du principe de Chasles permet de trouver facilement que le lieu du point A_1 est une surface E_1 du quatrième ordre. De même, le lieu du point A_2 est une surface E_2 du quatrième ordre. Un point de la surface E_1 ne peut être un point A_1 que pour une seule droite, donc le lieu de la droite *e* est une congruence dont les rayons unissent les points correspondants de deux surfaces du quatrième ordre liées par une correspondance birationnelle.

Les plans des faisceaux de rayons dont trois éléments appartiennent aux congruences G_1, G_2 *et à la congruence commune aux complexes* Φ_1, Φ_2, *contiennent des coniques dégénérées du complexe* Σ. *Les coniques situées dans ces plans dégénèrent en une droite appartenant à* Φ_1 *et* Φ_2, *et en une droite joignant deux points correspondants de deux surfaces du quatrième ordre en correspondance birationnelle.*

7. — Fixons de nouveau l'attention sur la surface Δ lieu des coniques du complexe Σ dont les plans passent par une droite *d*. D'après ce que nous avons vu, cette surface est d'ordre six et passe quatre fois par la droite *d*. D'après un corollaire d'un théorème dû à M. Fouret (*),

(*) L. Godeaux *Sur les surfaces possédant une droite multiple.* (Nouvelles Annales de mathématiques, 1909, 4e série, t. IX.)

les plans des coniques dégénérées d'un complexe de caractéristiques α, β enveloppent une surface de la classe $(2\alpha - 1)^2 (2\alpha + 3\beta)$. Dans le cas actuel, $\alpha = 1$, $\beta = 4$, on obtient une surface de classe quatorze. Ainsi la surface Δ contient quatorze coniques dégénérées. Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

La surface enveloppée par les plans contenant des coniques dégénérées du complexe Σ *est de la quatorzième classe, elle se décompose en une surface de quatrième classe et en cinq quadriques. La surface de quatrième classe est le lieu des plans tels que les droites situées dans un de ces plans et appartenant respectivement aux congruences* G_1, G_2 *et à la congruence commune aux complexes* Φ_1, Φ_2 *sont concourantes. Une des quadriques est le lieu des droites communes aux complexes* Φ_1, Φ_2, Φ_3. *Deux autres quadriques sont engendrées par des rayons de* G_1 *appartenant respectivement aux complexes* Φ_1, Φ_3. *Enfin, les deux dernières sont formées par les rayons de* G_2 *appartenant respectivement à* Φ_2, Φ_3.

Faisons une dernière remarque au sujet des coniques dégénérées du complexe Σ. Considérons l'une des droites communes aux congruences G_1, G_2. Tout plan passant par cette droite contient une conique du complexe Σ formée de la droite en question et d'une droite appartenant aux complexes Φ_1, Φ_2.

8. — Soit O un point arbitraire de l'espace. Par ce point passent une simple infinité de coniques du complexe Σ et ces coniques engendrent une surface Θ; leurs plans enveloppent, comme nous l'avons vu, un cône de la quatrième classe θ. Celui-ci est nécessairement tangent aux quatre plans déterminés par O et respectivement par les directrices des congruences G_1, G_2.

Une droite passant par O rencontre la surface Θ en quatre points extérieurs à O; ce point est évidemment quadruple, donc la surface Θ est du huitième ordre. On pourrait du reste vérifier cette donnée en appliquant le principe de Chasles.

Les coniques du complexe Σ passant par un point forment une surface du huitième ordre ayant ce point quadruple, leurs plans enveloppent un cône du quatrième ordre Cette surface contient cinquante-six coniques dégénérées.

Dans les paragraphes précédents, nous avons trouvé que les droites formant des coniques dégénérées appartenaient à certaines congruences dont deux d'ordre huit, trois d'ordre quatre, une d'ordre un et, enfin, celle formée par les droites qui unissent les points correspondants des deux surfaces E_1, E_2. Soit x l'ordre de cette dernière congruence; évidemment, on a

$$2 \times 8 + 3 \times 4 + 1 + x = 56,$$

donc :

Les coniques situées dans les plans tangents à la surface E *dégénèrent en une droite commune aux complexes* Φ_1, Φ_2, *et en une droite appartenant à une congruence d'ordre vingt-sept.*

9. — Soit donnée une congruence de coniques M de classe $m > 0$ appartenant au complexe Σ. Proposons-nous de rechercher les valeurs que peut avoir l'ordre d'une telle congruence.

D'après les propriétés du complexe Σ, un plan contenant une conique de M ne peut généralement en contenir qu'une, donc les plans des coniques de la congruence enveloppent une surface Ψ de classe m.

La surface Ψ peut passer respectivement m_1, m_2, m_3, m_4 fois par les directrices des congruences G_1, G_2, et alors les plans tangents à Ψ passant par un point O forment un cône de classe m tangent m_1, m_2, m_3, m_4 fois respectivement aux plans déterminés par O et par les directrices en question.

Supposons en premier lieu $m = 1$. La surface Ψ se réduit à un point P qui peut être situé sur une des directrices de l'une des congruences G_1, G_2. Dans ce dernier cas, les coniques de Σ situées dans des plans passant par P forment deux congruences; l'une de celles-ci est M, de classe un et d'ordre μ, l'autre est la congruence de classe zéro et d'ordre un formée par les coniques dont les plans passent par la directrice choisie. Par un point O de l'espace passent quatre coniques de Σ dont le plan passe par P, donc on a $\mu + 1 = 4$, $\mu = 3$. Si P n'était pas situé sur l'une des directrices de G_1 ou G_2, on aurait évidemment $\mu = 4$.

L'ordre d'une congruence de classe un appartenant à Σ est trois ou quatre.

Passons au cas $m = 2$. Alors on peut avoir

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 0,$$
$$m_1 = 1,\ m_2 = m_3 = m_4 = 0,$$
$$m_1 = m_2 = 1,\ m_3 = m_4 = 0,$$
$$m_1 = m_2 = m_3 = 1,\ m_4 = 0.$$

Il est facile de voir que dans chacun de ces cas l'ordre μ de la congruence M assume les valeurs huit, sept, six et cinq.

L'ordre d'une congruence de classe deux appartenant à Σ est cinq, six, sept ou huit.

Arrivons au cas général en supposant $m > 3$. La somme de trois des nombres m_1, m_2, m_3, m_4 ne peut pas excéder $m - 1$. Dans le cas le plus favorable à l'abaissement de l'ordre μ de M, on aura $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = \frac{m-1}{3}$.

Les coniques de Σ situées dans les plans tangents à Ψ forment cinq congruences; l'une de celles-ci est M, de classe n et d'ordre μ, les autres sont d'ordre un et de classe nulle, mais comptent chacune m_1, m_2, m_3, m_4 fois respectivement. On a donc

$$\mu = 4m - (m_1 + m_2 + m_3 + m_4),$$

et dans le cas le plus favorable,

$$\mu = 4m - 4\frac{m-1}{3} = \frac{4}{3}(2m + 1).$$

L'ordre d'une congruence de classe m > 2 *située dans Σ est égal à l'un des entiers compris entre* $\frac{4}{3}$ (2m + 1) *et* 4m.

Liége, 23 juillet 1910.

Bruxelles. — Imprimerie HAYEZ, rue de Louvain, 112.