Sur les systèmes linéaires quadruplement infinis de courbes appartenant à une surface algébrique (*); par Lucien Godeaux, candidat en sciences physiques et mathématiques de l'Université de Liége.

Les systèmes linéaires quadruplement infinis de courbes appartenant à une surface algébrique permettent d'arriver à une nouvelle expression invariante de la surface. Cette étude m'a été suggérée par la lecture d'un mémoire de M. Segre sur certaines singularités des courbes algébriques et en particulier des courbes paraboliques des surfaces (**).

1. — Soit sur une surface algébrique F, supposée dépourvue de singularités, un système linéaire $|C|$ quadruplement infini. Supposons que le système $|C|$ ne possède aucun point de base et qu'aucune des courbes C n'ait un point triple. Dénotons par p le genre et par n le degré du système.

Soit $|C_j|$ le système jacobien de $|C|$, c'est-à-dire le système linéaire formé par les jacobiennes de tous les réseaux de courbes C contenus dans $|C|$.

Le système bijacobien $|C_{jj}|$ se décompose en deux autres systèmes (***); on a

$$| C_{jj} | = | C_r + C |,$$

(*) Extrait des *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), nos 9-10, pp. 719-724, 1910.

(**) Segre, *Su alcuni punti singolari delle curve algebriche, e sulla linea parabolica di una superficie.* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1897, s. 5, vol. VI, 2e sem., pp. 168-175.)

(***) Pannelli, *Sui sistemi lineari tripiamente infiniti di curve tracciati sopra una superficie algebrica.* (Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo, 1905, t. XX, pp. 34-48.)

où C_r est le lieu des points de rebroussement des courbes C d'un système ∞^3 linéaire.

Dans le travail suivant, nous nous occuperons du système trijacobien.

2. — D'après un théorème fondamental de M. Enriques (*), on a

$$| C_{jjj} | = | (C_r + C)_j | = | C_{rj} + 3C | = | C_j + 3C_r |.$$

Désignons par C_s la courbe lieu des points doubles de $\infty^2 C_r$ formant un réseau ; on a

$$| C_s + 3C | = | C_j + 3C_r |. \qquad (1)$$

Soit $\overline{C}_r$ une courbe C_r qui possède un point double ; désignons par $|\overline{C}|$ le système linéaire triplement infini qui lui a donné naissance.

Entre les courbes $\overline{C}$ et les plans d'un espace à trois dimensions, établissons une projectivité. La surface F sera représentée par une surface F′ d'ordre n birationnellement équivalente, et la courbe $\overline{C}_r$ sera représentée par la courbe parabolique de F′, et cette courbe parabolique aura un point double. Or, d'après un théorème de M. Segre (**), ce point double sera ou bien un tacnode symétrique, ou bien un point triple pour une courbe $\overline{C}$ (section plane de F′). Nous avons supposé que $|C|$ ne

---

(*) Enriques, *Intorno ai Fondamenti della Geometria sopra le superficie algebriche*. (Atti della R. Accademia di Torino, 1901, t. XXXVII, § 16.)

(**) Segre, *loc. cit.*, § 3. Le tacnode symétrique a été rencontré par MM. Wölfing et Kötter (indiqué par M. Segre).

possédait pas de courbe ayant un point triple, donc le point double de C_r ne peut être qu'un tacnode symétrique.

On en conclut que la courbe C_s est le lieu des tacnodes symétriques des courbes de $|C|$.

3. — La courbe C_s est en relation avec le système 13 — canonique de F. En effet, on a

$$|C_j - 3C| = |\Theta|,$$
$$|C_r - 8C| = |4\Theta| \quad (*),$$

$|\Theta|$ désignant le système canonique de F. On conclut de ces deux formules et de (1) l'équation symbolique

$$|C_s - 24C| = |13\Theta|.$$

Ainsi, *une courbe 13 — canonique augmentée de vingt-quatre fois la courbe* C *d'un système linéaire est équivalente à une courbe* C_s *relative à ce système.*

4. — Soit $|C'|$ un système de courbes analogue à $|C|$ tracé sur F. La formule (1) donne

$$C_s + 24C' \equiv C'_s + 24C. \qquad (2)$$

De la formule (2) on déduit successivement (**)

$$[C_sC_r] + 24[C_rC'] = [C'_sC_r] + 24[C_rC], \qquad (3)$$
$$[C_sC'_r] + 24[C'_rC'] = [C'_sC'_r] + 24[C'_rC]. \qquad (4)$$

(*) Pannelli, *loc. cit.*

(**) La notation [HK] veut dire : nombre de points communs aux deux courbes H et K.

Mais on a

$$C_r + 8C' \equiv C'_r + 8C, \tag{5}$$

et on en déduit

$$[C_sC_r] + 8\,[C_sC'] = [C_sC'_r] + 8\,[C_sC], \tag{6}$$

$$[C'_sC_r] + 8\,[C'_sC'] = [C'_sC'_r] + 8\,[C'_sC]. \tag{7}$$

Entre les égalités (3) et (7), éliminons $[C'_sC_r]$. Il vient

$$[C_sC_r] + 8\,[C'_sC'] + 24\,[C_rC'] = [C'_sC'_r] + 8\,[C'_sC] + 24\,[C_rC]. \tag{8}$$

De même, en éliminant $[C_sC'_r]$ entre (4) et (6), on a

$$[C_sC_r] + 8\,[C_sC'] + 24\,[C'_rC'] = [C'_sC'_r] + 8\,[C_sC] + 24\,[C'_rC]. \tag{9}$$

La formule (5) donne successivement

$$[C'_rC] + 8\,[CC] = [C_rC] + 8\,[C'C], \tag{10}$$

$$[C'_rC'] + 8\,[CC'] = [C_rC'] + 8\,[C'C']. \tag{11}$$

Additionnons (8), (9), (10) et (11), les deux dernières multipliées par 24 ; il vient

$$\left.\begin{aligned} &[C_sC_r] + 96n + 4\,[C_sC'] - 4\,[C_sC] - 24\,[C_rC] \\ &= [C'_sC'_r] + 96n' + 4\,[C'_sC] - 4\,[C'_sC'] - 24\,[C'_rC'] \end{aligned}\right\}. \tag{12}$$

Remarquons que le genre de la courbe 24C est égal à

$$24p + 12 \times 23n - 23$$

et désignons par p_s le genre de C_s, par p'_s celui de C'_s et par p' le genre de C'. La formule (2) donne

$$\left.\begin{aligned} &24\,[C'_sC] + p'_s + 24p + 12 \times 23n \\ &= p_s + 24p' - 12 \times 23n' + 24\,[C_sC'] \end{aligned}\right\}. \tag{13}$$

Entre les équations (12) et (13), éliminons $[C'_sC]$ et $[C_sC']$. On obtient

$$\begin{aligned} 6\,\{[C_sC_r] &+ 96n - 4[C_sC] - 24\,[C_rC]\} \\ &+ p'_s + 24\,p + 12 \times 23n \\ = 6\,\{[C'_sC'_r] &+ 96n' - 4\,[C'_sC'] - 24\,[C'_rC']\} \\ &+ p_s + 24p' + 12 \times 23n'. \end{aligned}$$

On en déduit que l'expression

$$p_s + 24\,[C_sC] + 144\,[C_rC] - 6\,[C_sC_r] - 24p - 852n \qquad (14)$$

ne dépend pas du système $|C|$ dont on part ; c'est donc un invariant relatif de cette surface.

5. — Cherchons à exprimer (14) en fonction de p_s et des caractères p et n de $|C|$.

Des formules données dans le travail de M. Pannelli déjà cité, on déduit aisément

$$C_r + 4C \equiv 4C_j,$$

et de là

$$[C_rC] = 4\,[C_jC] - 4n = 4n + 8p - 8. \qquad (15)$$

De la formule (1), on déduit

$$[C_sC_r] + 3\,[C_rC] = [C_rC_j] + 3\,[C_rC_r],$$

et comme

$$\begin{aligned} [C_rC_r] + 4\,[C_rC] &= 4\,[C_rC_j], \\ [C_sC_r] + 15\,[C_rC] &= 13\,[C_rC_j], \end{aligned}$$

on trouve enfin, Ω étant l'invariant de Castelnuovo-Enriques de F,

$$[C_sC_r] = 52\,\Omega - 8n + 400p - 452. \qquad (16)$$

La formule (1) donne

$$[C_s C] = 11n + 26p - 26. \tag{17}$$

Moyennant (15), (16) et (17), l'expression invariante (14) s'écrit

$$p_s - 312\,\Omega + 36n - 648p + 936.$$

Comme Ω est lui-même un invariant relatif, on en déduit que *l'expression*

$$M = p_s + 36n - 648p$$

est un invariant relatif de la surface F.

6. — Reprenons la formule (16). Le nombre $[C_s C_r]$ est évidemment égal au nombre des points doubles d'une courbe C_r, ou au nombre de courbes C d'un système triplement infini qui ont un tacnode symétrique. Désignons par ε ce nombre. On a

$$\varepsilon + 8n - 400p = 52\,\Omega - 452.$$

L'expression $52\Omega - 452$ est un invariant relatif avec Ω; il en résulte que *l'expression*

$$\mu = \varepsilon + 8n - 400p$$

est un invariant relatif de la surface F.

En particulier, si nous supposons que les sections planes d'une surface de l'espace à trois dimensions sont dépourvues de points triples, le nombre ε sera le nombre de points doubles de la courbe parabolique de la surface.

Liége, 24 août 1909.

Bruxelles. — Imprimerie HAYEZ, rue de Louvain, 112.