Sur le connexe trilinéaire (point-plan-droite) (*)

PAR

Lucien GODEAUX

Candidat en sciences physiques et mathématiques, à Liége.

J'avais commencé, il y a deux ans, l'étude du connexe trilinéaire (point-plan-droite); j'ai consigné dans cette note les quelques résultats auxquels j'étais arrivé.

1. — Les coordonnées courantes d'un point (x) seront désignées par (x_1, x_2, x_3, x_4), les coordonnées courantes d'un plan (u) par (u_1, u_2, u_3, u_4) et, enfin, les coordonnées courantes d'une droite (p) par $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$. On pourra convenir à volonté que les coordonnées de la droite (p) sont les coordonnées pluckériennes, et alors elles seront liées par la relation

$$p_1p_2 + p_3p_4 + p_5p_6 = 0, \tag{1}$$

(*) Extrait des *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), nº 12, pp. 1161-1168, 1909.

ou bien les coordonnées de M. Klein, liées alors par la relation

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 = 0. \tag{1'}$$

Considérons maintenant la relation

$$\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} \sum_{k=1}^{6} a_{ijk} x_i u_j p_k = 0. \tag{2}$$

La géométrie constituée en prenant comme élément l'ensemble d'un point, d'un plan et d'une droite est à dix dimensions, la relation (2) représentera un hyperplan pour cette géométrie, c'est-à-dire qu'elle découpera ∞^9 éléments (point-plan-droite).

2. — A l'ensemble d'un point et d'un plan, la relation (2) fait correspondre les ∞^3 droites d'un complexe linéaire. Les éléments (point-plan) auxquels correspond un complexe linéaire déterminé

$$A_1 p_1 + A_2 p_2 + A_3 p_3 + A_4 p_4 + A_5 p_5 + A_6 p_6 = 0 \tag{3}$$

sont donnés par les équations

$$\Sigma a_{ijk} x_i u_j = \rho A_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, 6) \tag{4}$$

ρ étant un facteur de proportionnalité. Les éléments (point-plan) étant en nombre ∞^6, il y en a ∞^1 qui répondent aux équations (4). Les points (ou les plans) qui composent ces ∞^1 éléments engendrent une courbe C (ou une développable Γ) dont les équations sont obtenues en éliminant les u (ou les x) et ρ entre les équations (4). On obtient, pour les équations de C :

$$\left\| \begin{array}{cccc} \Sigma a_{i11} x_i & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \Sigma a_{i16} x_i \\ \Sigma a_{i21} x_i & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \Sigma a_{i26} x_i \\ \Sigma a_{i31} x_i & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \Sigma a_{i36} x_i \\ \Sigma a_{i41} x_i & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \Sigma a_{i46} x_i \\ A_1 & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & A_6 \end{array} \right\| = 0. \qquad (5)$$

En appliquant les résultats de M. Stuyvaert (*), on trouve que la courbe C représentée par l'évanouissement de la matrice (5) est d'ordre dix et de genre douze.

Pareillement, la développable Γ est de classe dix et de genre douze.

Les éléments (point-plan) auxquels correspond un même complexe linéaire sont en nombre ∞^1, le point décrit une courbe d'ordre dix et de genre douze, et le plan une développable de classe dix et de genre douze.

3. — Lorsque le complexe (3) varie, on obtient un système ∞^5 de courbes C. Ces courbes ont évidemment en commun les points qui annulent la matrice

$$\| \Sigma a_{ijk} x_i \| = 0. \qquad (j = 1, 2, 3, 4; \quad k = 1, 2, \ldots, 6).$$

La question revient donc à chercher le nombre de points communs à trois surfaces du quatrième ordre circonscrites

(*) *Cinq études de géométrie analytique.* Gand, Lib. Van Goethem, 1908, pp. 10 et 13 à une courbe gauche du sixième ordre et de genre trois. On trouve aisément que le nombre cherché est égal à dix-neuf. De même on trouvera que les développables Γ ont en commun dix-neuf plans fixes.

4. — Les coefficients des équations des ∞^4 complexes spéciaux satisfont à l'équation

$$\sum_{k=1}^{6} A_k^2 = 0$$

si l'on a adopté les coordonnées de M. Klein, et à l'équation

$$A_1A_2 + A_3A_4 + A_5A_6 = 0$$

si, au contraire, ce sont les coordonnées pluckériennes que l'on a adoptées.

Les équations (4) permettent donc de former l'équation des éléments (point-plan) auxquels correspondent des complexes spéciaux; on trouve, dans le premier cas

$$\sum_{k=1}^{6} (\Sigma a_{ijk} x_i u_j)^2 = 0,$$

et dans le second :

$$(\Sigma a_{ij1} x_i u_j)\ (\Sigma a_{ij2} x_i u_j) + (\Sigma a_{ij3} x_i u_j)\ (\Sigma a_{ij4} x_i u_j)$$
$$+ (\Sigma a_{ij5} x_i u_j)\ (\Sigma a_{ij6} x_i u_j) = 0.$$

Les éléments (point-plan) auxquels correspondent des complexes spéciaux appartiennent à un connexe d'ordre et de classe deux.

5. — A un plan et à une droite correspondent, par l'équation (2), les points d'un plan dont les coordonnées ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, sont données par

$$\Sigma a_{ijk} u_j p_k = \rho \xi_i, \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{6}$$

ρ étant un facteur de proportionnalité. Inversement les éléments (plan-droite) auxquels correspondent les points d'un plan d'équation

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0 \tag{7}$$

satisfont aux équations (6). Ainsi, *à un plan* (7) *correspondent* ∞^4 *éléments (plan-droite).*

Le plan (7) est indéterminé lorsque les éléments (plan-droite) choisis vérifient les relations

$$\Sigma a_{ijk} u_j p_k = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{8}$$

Par ces relations, à un plan (u) correspondent deux droites qui, lorsque le plan varie, décrivent le complexe du quatrième ordre représenté par

$$| \Sigma a_{ijk} p_k | = 0, \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4). \tag{9}$$

A une droite du complexe (9) correspond généralement un plan (u) dont les coordonnées sont données par trois des équations (8) choisies d'ailleurs arbitrairement.

Un point quelconque, une droite du complexe (9) *et le plan qui lui correspond par les équations* (8) *satisfont identiquement à l'équation* (2).

Pareillement, on démontrerait qu'un plan quelconque, une droite du complexe (9) et un point lui correspondant par les équations

$$\Sigma a_{ijk} x_i p_k = 0, \qquad (j = 1, 2, 3, 4) \tag{10}$$

satisfont identiquement à l'équation (2).

6. — Les droites correspondant par les formules (8) aux plans (u) passant par un point (y) engendrent une congruence représentée par l'évanouissement de la matrice

$$\| \Sigma a_{1jk}p_k \quad \Sigma a_{2jk}p_k \quad \Sigma a_{3jk}p_k \quad \Sigma a_{4jk}p_k \quad y_j \| = 0. \quad (j=1,2,3,4). \qquad (11)$$

Pour évaluer l'ordre de cette congruence, il suffira de supposer que les quatre premiers éléments de chaque ligne de la matrice (11) sont linéaires par rapport à trois variables homogènes; on trouve six solutions, donc :

Le complexe (9) *contient* ∞^3 *congruences d'ordre six, qui sont formées par les droites correspondantes aux plans* (u) *passant par des points fixes de l'espace.*

Les droites du complexe (9), qui correspondent aux plans (u) passant par un point fixe (y), au moyen des formules (8) et aux points (x) situés dans un plan fixe (v), au moyen des formules (10), sont situées sur une surface réglée, représentée par l'évanouissement de la matrice angulaire (*).

$$\left| \begin{array}{cccc|c} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \\ \Sigma a_{11k}p_k & . & . & \Sigma a_{14k}p_k & v_1 \\ \Sigma a_{21k}p_k & . & . & \Sigma a_{24k}p_k & v_2 \\ \Sigma a_{31k}p_k & . & . & \Sigma a_{34k}p_k & v_3 \\ \Sigma a_{41k}p_k & . & . & \Sigma a_{44k}p_k & v_4 \end{array} \right| = 0. \qquad (12)$$

(*) GIAMBELLI, *Ordine si una varietà più ampia di quella rappresentata coll'annulare tutti i minori di dato ordine estratti di una data matrice generica di forme.* (MEMORIE DEL R. IST. LOMB., 1904 (3), XI, pp. 101-133 [p. 105].)

Pour évaluer l'ordre de cette surface, on remplacera les p_k par des combinaisons connues des coordonnées de deux points de la droite (p). Soient (y), (z) ces points. On fera décrire au point (z) la droite $z_3 = z_4 = 0$ et au point (y) le plan $y_1 = 0$. Cela fait, on posera

$$\frac{y_3}{y_2} = \frac{\rho_1}{\rho_4}, \qquad \frac{y_4}{y_2} = \frac{\rho_2}{\rho_4}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_3}{\rho_4}. \tag{13}$$

Désignons par θ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ la forme quadratique par rapport aux (ρ) transformée de l'expression $\Sigma\, a_{ijk}\, p_k$ au moyen de la substitution (13). La matrice angulaire (12) devient

$$\left| \begin{array}{cc|} y_j & \\ \cline{2-2} \theta_{ij} & v_i \end{array} \right| = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4). \tag{14}$$

Interprétons les (ρ) comme coordonnées ponctuelles d'un espace à trois dimensions. L'ordre a de la réglée sera égal au nombre b des points qui annulent la matrice (14) en dehors de la droite $\rho_3 = \rho_4 = 0$, diminué du nombre c des solutions $\rho_1 = \rho_2 = \rho_4 = 0$ qui satisfont à (14). On trouve, par un raisonnement de M. Stuyvaert (*) : $c = 20$.

Pour évaluer b, remarquons que la matrice

$$\left\| \begin{array}{ccccc} y_1 & \theta_{11} & \cdot & \cdot & \theta_{41} \\ y_2 & \theta_{12} & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_3 & \theta_{13} & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_4 & \theta_{14} & \cdot & \cdot & \theta_{44} \end{array} \right\| = 0$$

(*) *Loc. cit.*, p. 20.

représente une courbe d'ordre 24 qui se décompose en une courbe C_{18} d'ordre 18 et six fois la droite $\rho_3 = \rho_4 = 0$. Le nombre b sera égal au nombre de points communs à C_{18} et à la surface

$$\begin{vmatrix} \theta_{12} & \theta_{13} & \theta_{14} & v_1 \\ \theta_{22} & . & \theta_{24} & v_2 \\ \theta_{32} & . & \theta_{34} & v_3 \\ \theta_{42} & . & \theta_{44} & v_4 \end{vmatrix} = 0$$

en dehors de $\rho_3 = \rho_4 = 0$. On aura donc

$$b = 6 \times 18 - d - 3 \times 12,$$

d étant le nombre des points qui annulent la matrice

$$\left\| \begin{matrix} y_2 & \theta_{12} & \theta_{22} & \theta_{32} & \theta_{42} \\ y_3 & \theta_{13} & \theta_{23} & \theta_{33} & \theta_{43} \\ y_4 & \theta_{14} & \theta_{24} & \theta_{34} & \theta_{44} \end{matrix} \right\| = 0$$

en dehors de la droite $\rho_3 = \rho_4 = 0$. On trouve $d = 16$, d'où

$$a = 6 \times 18 - 16 - 20 = 72.$$

Liége, 25 novembre 1909.

Bruxelles. — Imprimerie HAYEZ, rue de Louvain, 112.