Bulletin de la Classe des sciences

Remarque sur les suites de Laplace inscrites dans une suite de Laplace

Lucien Godeaux

Résumé

Soit, dans un espace projectif à n dimensions Sn, une suite de Laplace L. Associons à cette suite les espaces S m (m < n) déterminés par m 1 points consécutifs de cette suite. Nous dirons que deux de ces espaces sont consécutifs si parmi les points de L qui les déterminent, il y a m points communs. Soient alors M, N deux points consécutifs d'une seconde suite de Laplace L'. On démontre que si M, N appartiennent à deux espaces Sm consécutifs, deux points consécutifs quelconques de la suite L' appartiennent à deux espaces Sm consécutifs.

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Remarque sur les suites de Laplace inscrites dans une suite de Laplace.

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Soit, dans un espace projectif à n dimensions S_n, une suite de Laplace L. Associons à cette suite les espaces S_m $(m < n)$ déterminés par $m + 1$ points consécutifs de cette suite. Nous dirons que deux de ces espaces sont consécutifs si parmi les points de L qui les déterminent, il y a m points communs. Soient alors M, N deux points consécutifs d'une seconde suite de Laplace L'. On démontre que si M, N appartiennent à deux espaces S_m consécutifs, deux points consécutifs quelconques de la suite L' appartiennent à deux espaces S_m consécutifs.

1. Soient, dans un espace projectif S_n à n dimensions X, Y deux points transformés de Laplace l'un de l'autre. Nous écrirons

$$\frac{\partial X}{\partial u} + 2bY = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial v} + 2uX = 0,$$

a et b étant des fonction de u, v. En abrégé, nous écrirons

$$X^{10} + 2bY = 0, \quad Y^{01} + 2aX = 0.$$

Désignons par X_1, X_2, ... les transformés successifs de X dans le sens des v, par Y_1, Y_2, ... ceux de Y dans le sens des u. En posant

$$h_r = -(\log\ bh_1 \dots h_{r-1})^{11} + h_{r-1},$$
$$k_r = -(\log\ ak_1 \dots k_{r-1})^{11} + k_{r-1},$$

nous avons

$$X_r^{01} = X_{r+1} + X_r(\log\ bh_1 \dots h_r)^{01}, \quad X_r^{10} = h_r X_{r-1},$$
$$Y_r^{10} = Y_{r+1} + Y_r(\log\ ak_1 \dots k_r)^{10}, \quad Y_r^{01} = k_r Y_{r-1}.$$

Nous désignerons par L la suite ... X_r, ..., X_1, X, Y, Y_1, ..., Y_r, ...

Considérons un point M appartenant à l'espace $X_{m-1}X_{m-2} \dots XY$ et un point N appartenant à l'espace $X_{m-2}X_{m-3} \dots XYY_1$, où m est inférieur à n.

Supposons que M, N soient transformés de Laplace l'un de l'autre, les variables étant u, v.

2. Nous avons

$$M = \lambda_{m-1}X_{m-1} + \lambda_{m-2}X_{m-2} + \dots + \lambda_0 X + \mu_0 Y,$$

les λ et μ_0 étant des fonctions de u, v. En dérivant par rapport à u, on a

$$M^{10} = \lambda_{m-1}^{10}X_{m-1} + \dots + \mu_0 Y_1, \tag{1}$$

les termes non écrits étant des termes en X_{m-2}, ..., Y. Par conséquent, le point

$$M^{10} - M(\log \lambda_{m-1})^{10} \tag{2}$$

appartient à l'espace $X_{m-2} \dots YY_1$ et coïncide avec le point N.

L'expression (2) dépend de X_{m-2}, X_{m-3}, ..., X, Y, Y_1. Nous désignerons par l le coefficient de X_{m-3} : nous aurons donc

$$M^{10} - M(\log \lambda_{m-1})^{10} = lX_{m-2} + \dots + \mu_0 Y_1.$$

Dérivons la relation précédente par rapport à v ; nous obtenons

$$\begin{aligned} M^{11} - M^{01} (\log \lambda_{m-1})^{10} - M (\log \lambda_{m-1})^{11} = \\ = lX_{m-1} + \dots + \mu_0^{01} Y_1, \end{aligned}$$

les termes non écrits dépendant de X_{m-2}, X_{m-3}, ..., X, Y.

On en déduit que l'expression

$$M^{11} - M^{01} (\log \lambda_{m-1})^{10} - M^{10} (\log \mu_0)^{01}$$

ne dépend que de X_{m-1}, X_{m-2}, ..., X, Y. Le point précédent doit donc coïncider avec M et il en résulte que M satisfait à une relation de Laplace de la forme

$$M^{11} - M^{01} (\log \lambda_{m-1})^{10} - M^{10} (\log \mu_0)^{01} + KM = 0.$$

3. Le transformé de Laplace M_1 de M dans le sens des v est

$$M_1 = M^{01} - M(\log \mu_0)^{01}.$$

On a

$$M^{01} = \lambda_{m-1}X_m + \dots + \mu_0^{01}Y,$$

les termes non écrits dépendant de $X_{m-1}, X_{m-2}, \dots, X_1, X$.

On en conclut que M_1 ne dépend que de $X_m, X_{m-1}, \dots, X$, c'est-à-dire appartient à l'espace S_m déterminé par ces points.

Désignons par $M_2, M_3, \dots$ les transformés de Laplace de M_1 dans le sens des v et par $N_1, N_2, \dots$ ceux de N dans le sens des u.

Le point M_r appartient à l'espace S_m déterminé par les points

$$X_{m+r-1}, X_{m+r-2}, \dots, X_r, X_{r-1}$$

et le point N_r, à l'espace S_m déterminé par les points

$$X_{m-r-3}, X_{m-r-3}, \dots, Y_r, Y_{r+1}.$$

En particulier, le point N_{m-2} appartient à l'espace S_m déterminé par les points

$$X, Y, \dots, Y_{m-1},$$

le point N_{m-1} à l'espace déterminé par les points

$$Y, Y_1, \dots, Y_m$$

et le point N_{m+s-1} à l'espace déterminé par les points

$$Y_s, Y_{s+1}, \dots, Y_{m+s}.$$

4. Reprenons la suite L et considérons les espaces linéaires S_m à m dimensions ($m < n$) déterminés par $m+1$ points consécutifs de la suite. Convenons de dire que deux de ces espaces S_m sont consécutifs s'ils ont en commun $m - 1$ des points de la suite L qui les déterminent. Ainsi, les espaces $X_{m-1}, \dots, Y$ et $X_{m-2}, \dots, Y_1$ sont consécutifs.

Désignons par L′ la suite de Laplace déterminée par les points M, N.

Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Si deux points consécutifs de la suite L′ *appartiennent à deux* *espaces à* m *dimensions consécutifs associés à la suite* L, *deux points consécutifs quelconques de la suite* L′ *jouissent de la même propriété.*

Pour $m = 1$, on retrouve un théorème bien connu et la suite L′ est inscrite dans la suite L au sens ordinaire du mot.

Pour $m > 1$, il nous a paru naturel de continuer à dire que la suite L′ était inscrite dans la suite L.

Liège, le 4 février 1954.