SUR LA GÉNÉRATION

DE

QUELQUES COURBES & SURFACES ALGÉBRIQUES

PAR

LUCIEN GODEAUX

Candidat en Sciences physiques et mathématiques
de l'Université de Liège

Extrait des Mémoires et Publications
de la Société des Sciences, des Arts et des Lettres
du Hainaut
VII[e] série, tome I, 61[e] volume.

MONS

IMPRIMERIE DEQUESNE-MASQUILLIER & FILS

1909

Sur la génération de quelques courbes et surfaces algébriques

PAR

Lucien GODEAUX

Candidat en sciences physiques et mathématiques de l'Université de Liège.

---

1. Etant donné un nombre K ayant l'une des valeurs 2, 3, ..., 6, soient dans l'espace deux groupes de K points A_1, A_2, ..., A_k, B_1, ..., B_k, et un groupe de K plans α_1, $_2$, ..., α_k. Soient a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}, le s coordonnées homogènes du point A_i, b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}, b_{i4}, celles du point B_i, et α_{i1}, α_{i2}, α_{i3}, α_{i4} celles du plan α_i. Considérons encore 6 — K droites d_1, d_2, ..., d_{6-k} et supposons que les points, les plans et les droites soient en positions génériques.

Le point d'intersection de la droite joignant un point M (x_1, x_2, x_3, x_4) au point B_i, avec le plan α_i, a pour coordonnées :

$$\alpha_{i\,b_i} x_1 - \alpha_{i\,x} b_{i1}, \ldots\ldots, \alpha_{i\,b_i} x_4 - \alpha_{i\,x} b_{i4}.$$

La droite joignant ce point et le point A_i a pour coordonnées (de Plücker) :

$$\rho\,\varphi_{i12} = a_{i1}(\alpha_{i\,b_i} x_2 - \alpha_{i\,x} b_{i2}) - a_{i2}(\alpha_{i\,b_i} x_1 - \alpha_{i\,x} b_{i1}), \ldots\ldots,$$

ρ étant un facteur de proportionnalité. Exprimons que les droites ainsi obtenues en faisant $i = 1, 2, \ldots\ldots, K$ et les droites $d_1, d_2, \ldots\ldots, d_{6-K}$, sont situées dans un même complexe linéaire :

$$\left|\begin{array}{cccccc} \varphi_{112} & \varphi_{113} & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_{134} \\ \varphi_{212} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_{234} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{K\,12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_{K\,34} \\ d_{112} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & d_{134} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{6-K,\,12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & d_{6-K,\,34} \end{array}\right| \qquad (1)$$

$d_{112}, \ldots\ldots, d_{134}$, étant les coordonnées de $d_1, \ldots\ldots$

Le sommet d'un angle K - *èdre qui se déforme de manière que ses arêtes passent par* K *points fixes et rencontrent* K *plans fixes en des points dont les jonctions à* K *nouveaux points fixes appartiennent avec* 6 — K *droites fixes à un même complexe linéaire, décrit une surface d'ordre* K : F_K.

Cela découle de ce que les φ sont fonctions linéaires des x De plus, la forme des fonctions φ permet d'affirmer que la surface F_K, passe par les points $B_1, \ldots\ldots, B_K$.

2. — Considérons en particulier le cas $K = 5$. D'après la forme de l'équation (1), toutes les surfaces F_5, obtenues en faisant varier la droite d_1, passent par la courbe représentée par l'évanouissement de la matrice.

$$\left\|\begin{array}{cccccc} \varphi_{112} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_{134} \\ \varphi_{212} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{512} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_{534} \end{array}\right\| = 0. \qquad (2)$$

Les méthodes développées simultanément par MM. GIAMBELLI[1] et STUYVAERT[2] nous permettent d'évaluer le genre et l'ordre de la courbe représentée par (2). On trouve pour l'ordre quinze et pour le genre vingt-six. De là :

Si un angle pentaèdre se déforme de telle manière que ses arêtes passent par cinq points fixes et rencontrent cinq plans fixes en des points dont les jonctions à cinq nouveaux points fixes appartiennent à une infinité de complexes linéaires, son sommet décrit une courbe du quinzième ordre et de genre vingt-six : C_{15}.

On peut encore énoncer les théorèmes suivants : deux surfaces F_5 se rencontrent en une courbe variable d'ordre dix, s'appuyant en quarante points sur C_{15}. Trois surfaces F_5 ne passant pas par une même courbe d'ordre dix, se rencontrent en un groupe de dix points variables.

3. — Supposons $K = 4$; alors toutes les surfaces F engendrées, en considérant tous les couples de droites d_1, d_2, passent par un groupe de points annulant la matrice.

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_{112} & . & . & . & . & \varphi_{134} \\ \varphi_{212} & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \varphi_{412} & . & . & . & . & \varphi_{434} \end{matrix} \right\| = 0. \qquad (3)$$

Les points de ce groupe sont donc au nombre de vingt[3].

[1] *Ordine di una varieta più ampia di quella rappresentata coll' annullare tutti i minori di dato ordine estratti da una data matrice generica di forme.* Mem. Ist. Lomb. 1904.

[2] *Cinq études de Géométrie analytique.* Mémoires de la Soc. des Sc. de Liège, 3e série, tome VII, 1897, pp. 37 et 38.

[3] STUYVAERT, loc. cit., p. 15.

4. — On pourrait de même établir le théorème suivant : *Si un angle* K-*èdre se déforme de telle manière que ses arêtes passent par* K *points fixes et rencontrent* K *plans fixes en des points dont les jonctions à* K *nouveaux points fixes appartiennent à une même congruence linéaire d'un* ∞^{K-1} *système linéaire de congruences, son sommet décrira une courbe d'ordre*

$$\frac{K(K-1)}{2} \quad (K \leqslant 5).$$

Liège, 11 octobre 1909.