Bulletin de la Classe des sciences

Remarque sur les homographies cycliques

Lucien Godeaux

Résumé
On considère, dans un espace linéaire à p — 1 dimensions, où p est un nombre premier, une homographie cyclique, de période p. On attache à cette homographie p homographies harmoniques. Le produit de deux quelconques de ces homographies est une puissance d'une seconde homographie cyclique de période p.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

Remarque sur les homographies cycliques,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — On considère, dans un espace linéaire à $p - 1$ dimensions, où p est un nombre premier, une homographie cyclique, de période p. On attache à cette homographie p homographies harmoniques. Le produit de deux quelconques de ces homographies est une puissance d'une seconde homographie cyclique de période p.

Dans cette note, nous considérons une homographie cyclique H de période p, dans un espace linéaire S_{p-1} à $p - 1$ dimensions, possédant p points unis, p étant un nombre premier. Il existe p systèmes linéaires d'hyperquadriques transformées en elles-mêmes par cette homographie et p homographies harmoniques transformant en elles-mêmes les hyperquadriques de l'un de ces systèmes et échangeant les autres. Le produit de deux quelconques de ces homographies harmoniques est une puissance d'une seconde homographie cyclique de période p. Nous ne croyons pas que cette remarque d'ailleurs assez élémentaire, ait été faite.

1. Soit $p = 2\nu + 1$ un nombre premier. Dans un espace linéaire S_{p-1}, à $p - 1$ dimensions, considérons l'homographie H, cyclique de période p, d'équations.

$$H \equiv \begin{pmatrix} x_0 & \epsilon x_1 & \dots & \epsilon^i x_i & \dots & \epsilon^{p-1} x_{p-1} \\ x_0 & x_1 & \dots & x_i & \dots & x_{p-1} \end{pmatrix},$$

où ϵ est une racine primitive d'ordre p de l'unité. L'homographie H possède comme points unis les p sommets de la pyramide de référence.

Désignons par $\varphi_k(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1})$ une forme quadratique telle que l'on ait

$$\varphi_k(x_0, \epsilon x_1, \ldots, \epsilon^{p-1} x_{p-1}) = \epsilon^k \varphi_k(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}).$$

Nous avons

$$\varphi_0 = \lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1 x_{p-1} + \ldots + \lambda_i x_i x_{p-i} + \ldots + \lambda_\nu x_\nu x_{\nu+1},$$

$$\varphi_1 = \lambda_0 x_1 x_0 + \lambda_1 x_2 x_{p-1} + \ldots + \lambda_i x_{i+1} x_{p-1} + \ldots + \lambda_\nu x_{\nu+1}^2,$$

et d'une manière générale

$$\varphi_k = \lambda_0 x_k x_0 + \ldots + \lambda_i x_{i+k} x_{p-i} + \ldots \lambda_\nu x_{\nu+k} x_{\nu+1},$$

où nous convenons de remplacer un indice supérieur à p par cet indice diminué de p.

2. Considérons l'homographie harmonique

$$H_0 = \begin{pmatrix} x_0 & x_{p-1} & \ldots & x_{p-i} & \ldots & x_1 \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_i & \ldots & x_{p-1} \end{pmatrix},$$

H_0 transforme en lui-même le système linéaire d'hyperquadriques $\varphi_0 = 0$, où les λ sont considérés comme variables et, plus précisément, chacune des hyperquadriques de ce système.

Au terme $x_{i+k} x_{p-i}$, H_0 fait correspondre le terme $x_{p-i-k} x_i$, où nous conviendrons de remplacer un indice négatif par cet indice augmenté de p. Si l'on applique H au terme $x_{p-i-k} x_i$, il se reproduit multiplié par ϵ^{p-k}. On en conclut que H_0 fait correspondre au système linéaire d'hyperquadriques $\varphi_k = 0$, le système linéaire $\varphi_{p-k} = 0$.

Plus généralement, considérons l'homographie harmonique

$$H_k = \begin{pmatrix} x_k & x_{k-1} & \ldots & x_{p-i} & \ldots & x_{k+1} \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_{i+k} & \ldots & x_{p-1} \end{pmatrix}.$$

Observons que des quantités $x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}$, une seule est transformée en elle-même par H_k.

Si k est pair, posons $k = 2k'$; alors $x_{k'}$ est transformé en $x_{k'}$.

Si k est impair, posons $k = 2k' + 1$; alors $x_{\nu-k'+1}$ est transformé en $x_{\nu+k'+1}$.

Les hyperquadriques du système linéaire $\varphi_k = 0$ sont transformées en elles-mêmes par H_k.

Au terme $x_{i+h}x_{p-i}$, H_k fait correspondre le terme $x_{k-h+i}x_{k+i}$. Il en résulte qu'au système $\varphi_h = 0$, H_k fait correspondre le système $\varphi_{2k-h} = 0$ si $2k > h$ et le système $\varphi_{p+2k-h} = 0$ si $2k < h$.

Nous obtenons donc finalement p homographies harmoniques $H_0, H_1, \ldots, H_{p-1}$. L'homographie H_k transforme en soi le système $\varphi_k = 0$ et échange entre eux les $p - 1$ autres systèmes d'hyperquadriques $\varphi_0 = 0, \ldots, \varphi_{k-1} = 0, \varphi_{k+1} = 0, \ldots, \varphi_{p-1} = 0$.

3. Considérons les homographies harmoniques H_k, H_h et le produit H_kH_h. Supposons par exemple que l'on a $h \geqslant k$. Nous obtenons

$$H_kH_h = \begin{pmatrix} x_{h-k} & x_{h-k+1} & \ldots & x_{h-k+i} & \ldots & x_{h-k-1} \\ x_0 & x_i & \ldots & x_i & \ldots & x_{p-1} \end{pmatrix}.$$

Si nous désignons par θ l'homographie.

$$\theta = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_{i+1} & \ldots & x_0 \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_i & \ldots & x_{p-1} \end{pmatrix},$$

nous avons

$$H_kH_h = \theta^{h-k}.$$

En particulier

$$H_k^2 = 1.$$

θ est une homographie cyclique de période p, ayant p points unis : le point unitaire et ses transformés par H, H^2, ... H^{p-1}. On remarquera que si l'on applique $\theta, \theta^2, \ldots, \theta^{p-1}$ à un point uni de H, on obtient les autres.

Observons que θ fait correspondre au terme $x_{i+k}x_{p-i}$ le terme $x_{i+k+1}x_{p-i+1}$, donc θ fait correspondre à $\varphi_k = 0$ le système $\varphi_{k+2} = 0$.

4. On peut de même associer à θ, p homographies harmoniques.

Le système linéaire

$$\begin{aligned}\psi_0 \equiv \mu_0(x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_{p-1}^2)\\ + \mu_1(x_0x_1 + x_1x_2 + \ldots + x_{p-2}x_{p-1} + x_{p-1}x_0)\\ + \mu_2(x_0x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{p-2}x_0 + x_{p-1}x_1)\\ + \ldots + \mu_\nu(x_0x_\nu + x_1x_{\nu+1} + \ldots + x_{p-2}x_{\nu-2} + x_{p-1}x_{\nu-1}) = 0\end{aligned}$$

est formé d'hyperquadriques transformées en elles-mêmes par θ. Ces hyperquadriques sont également transformées en elles-mêmes par H_0.

Observons qu'à $\varphi_k = 0$, θ fait correspondre $\varphi_{k+2} = 0$. Cela étant, appliquons à $\psi_0 = 0$ la transformation

$$H_k = \begin{pmatrix} x_0 & \epsilon^k x_1 & \ldots & \epsilon^{ki} x_i & \ldots & \epsilon^{p-k} x_{p-1} \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_i & \ldots & x_{p-1} \end{pmatrix},$$

où les exposants de ϵ peuvent être ramenés à un nombre positif ou nul, inférieur à p, congru du nombre inscrit, mod. p.

Nous obtenons

$$\begin{aligned}\mu_0(x_0^2 + x_1^2\epsilon^{2k} + \ldots + x_{p-1}^2\epsilon^{p-2k})\\ + \mu_1\epsilon^k(x_0x_1 + x_1x_2\epsilon^{2k} + \ldots + x_{p-1}x_0\epsilon^{p-2k})\\ + \mu_2\epsilon^{2k}(x_0x_2 + x_1x_3\epsilon^{2k} + \ldots + x_{p-1}x_1\epsilon^{p-2k})\\ + \ldots + \mu_\nu\epsilon^{\nu k}(x_0x_\nu + x_1x_{\nu+1}\epsilon^{2k} + \ldots + x_{p-1}x_{\nu-1}\epsilon^{p-2k}) = 0.\end{aligned}$$

Si l'on applique θ au premier nombre de cette équation, il se reproduit multiplié par ϵ^{p-2k}. Nous désignerons le système linéaire d'hyperquadriques représenté par l'équation précédente par $\psi_{p-2k} = 0$, en convenant de remplacer $p - 2k$ par le nombre positif inférieur à p congru à $p - 2k$, mod. p.

En donnant à k les valeurs 0, 1, 2, ..., $p - 1$, nous obtenons les p systèmes linéaires d'hyperquadriques unies pour θ.

Observons que H_0 fait correspondre à $\psi_{p-2k} = 0$ le système $\psi_{2k} = 0$.

Posons $\theta_h = H_0H^h$. Nous avons

$$\theta_h = \begin{pmatrix} x_0 & \epsilon^h x_{p-1} & \ldots & \epsilon^{hi} x_{p-i} & \ldots & \epsilon^{p-h} x_1 \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_1 & \ldots & x_{p-1} \end{pmatrix}.$$

On a $\theta_h^2 = 1$ et θ_h est une homographie harmonique.

θ_h fait correspondre au système $\psi_{p-2k} = 0$ le système $\psi_{2(h+k)} = 0$. Pour $h = p - 2k$, ces systèmes coïncident.

Nous obtenons ainsi p homographies harmoniques $\theta_0 \equiv H_0$, $\theta_1, \ldots, \theta_{p-1}$ dont chacun laisse invariant un des systèmes ψ et échange les $p - 1$ autres deux à deux.

A l'homographie de période p, H, *sont associées* p *homographies harmoniques* $H_0, H_1, \ldots, H_p$; *le produit de deux de ces homographies est une puissance d'une homographie* θ *de période* p. *A cette homographie* θ *sont associées* p *homographies harmoniques* $\theta_0 \equiv H_0$, $\theta_1, \ldots, \theta_p$, *le produit de deux d'entre elles étant une puissance de* H.

Liège le 7 juin 1954.