Bulletin de la Classe des sciences

Recherches sur les points de diramation de troisième catégorie d'une surface multiple (5e note)

Lucien Godeaux

Résumé

Construction d'une surface multiple ayant un point de diramation isolé en lequel le cône tangent se scinde en un plan (σα), un cône cubique rationnel (τα), un cône quadratique (τβ) et un plan (σβ), chacun de ces éléments rencontrant le précédent et le suivant suivant une droite, mais ne rencontrant pas les autres en dehors du point de diramation. A ce dernier sont infiniment voisins successifs deux points doubles biplanaires dont le premier est sur la droite commune aux cônes (τα) (τβ).

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Recherches sur les points de diramation de troisième catégorie d'une surface multiple,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.
(Cinquième note).

Résumé. — Construction d'une surface multiple ayant un point de diramation isolé en lequel le cône tangent se scinde en un plan (σ_α), un cône cubique rationnel (τ_α), un cône quadratique (τ_β) et un plan (σ_β), chacun de ces éléments rencontrant le précédent et le suivant suivant une droite, mais ne rencontrant pas les autres en dehors du point de diramation. A ce dernier sont infiniment voisins successifs deux points doubles biplanaires dont le premier est sur la droite commune aux cônes (τ_α), (τ_β).

L'objet de cette note est de montrer que la singularité d'une surface multiple en un point de diramation de seconde espèce et de troisième catégorie, que nous avons envisagée dans nos trois premières notes [1], peut effectivement se présenter. Nous considérons une involution cyclique, d'ordre 199, appartenant à une surface algébrique F, présentant un point uni isolé auquel sont attachés les nombres $\alpha = 113$, $\beta = 118$. Une surface normale Φ, image de cette involution, sur laquelle au point A correspond un point de diramation A' isolé, possède en ce point la multiplicité 7. Le cône tangent à la surface en A' se compose d'un plan (σ_α), d'un cône rationnel du troisième ordre (τ_α), d'un cône du second ordre (τ_β) et d'un plan (σ_β). Au point A' sont infiniment voisins successifs deux points doubles biplanaires

[1] Les quatre premières notes ont paru dans le BULLETIN DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1953, pp. 1009-1019, 1083-1089 ; 1954, pp. 81-86.

dont le premier est sur la droite commune aux cônes (τ_α), (τ_β). Le point A′ est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à un ensemble de courbes rationnelles : une courbe σ_α de degré virtuel -2 ; une courbe τ_α de degré virtuel -5, rencontrant σ_α en un point ; quatre courbes ρ_{11}, ρ_{21}, ρ_{22}, ρ_{12} de degré virtuel -2, ρ_{11} rencontrant τ_α en un point, ρ_{21} rencontrant ρ_{11} en un point, ρ_{22} rencontrant ρ_{21} en un point, ρ_{21} rencontrant ρ_{12} en un point ; une courbe τ_β de degré virtuel -4, rencontrant ρ_{12} en un point ; une courbe σ_β de degré virtuel -2, rencontrant τ_β en un point.

Les raisonnements que nous utilisons ont été développés dans nos travaux antérieurs ; nous n'y reviendrons pas et supposerons ces travaux connus (¹).

1. Soient F une surface algébrique contenant une involution cyclique I, d'ordre 199, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, Φ une surface normale, image de l'involution, sur laquelle les points de diramation sont isolés. Nous désignerons par $|\Gamma_0|$ le système des sections hyperplanes de Φ, par $|C_0|$ le système qui lui correspond sur F.

Considérons un point uni A, auquel sont attachés les nombres $\alpha = 113$, $\beta = 118$ et soit A′ le point de diramation qui lui correspond sur Φ. Nous désignons par $|C_0'|$, $|C_0''|$, ... des systèmes linéaires appartenant à $|C_0|$ et dont A est un point-base dont la multiplicité va en croissant ; par $|\Gamma_0'|$, $|\Gamma_0''|$ ... les systèmes correspondants sur Φ. Nous indiquerons par Φ_i la surface, projection de Φ, dont les sections hyperplanes sont les courbes $\Gamma_0^{(i)}$.

Pour déterminer le comportement au point A des courbes C_0', C_0'' ..., nous devons déterminer les solutions en nombres entiers positifs des congruences

$$\lambda + 113\mu \equiv 0, \qquad \mu + 118\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 199)$$

(¹) *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités scient., n° 270, Paris, Hermann, 1935) ; *Mémoire sur les surfaces multiples* (Mémoires in-8° de l'Acad. roy. de Belgique, 1953) ; *Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples* (Deuxième Colloque de Géométrie algébrique ; Liège, 1952, pp. 225-231 ; Liège, Thone et Paris, Masson, 1952).

et les classer par ordre de croissance des sommes $\lambda + \mu$. On a

$$\lambda_1 = 5,\ \mu_1 = 7\ ;\ \lambda_2 = 10,\ \mu_2 = 14\ ;\ \lambda_3 = 15,\ \mu_3 = 21\ ;\ \lambda_4 = 32,\ \mu_4 = 5\ ;\ \lambda_5 = 3,\ \mu_5 = 44\ ;\ \lambda_6 = 20.$$

$$\mu_6 = 28\ ;\ \lambda_7 = 37,\ \mu_7 = 12\ ;\ \lambda_8 = 8,\ \mu_8 = 51\ ;\ \lambda_9 = 25,\ \mu_9 = 35\ ;\ \lambda_{10} = 42,\ \mu_{10} = 19\ ;\ \lambda_{11} = 50,$$

$$\mu_{11} = 3\ ;\ \lambda_{12} = 13,\ \mu_{12} = 58\ ;\ \lambda_{13} = 30,\ \mu_{13} = 42\ ;\ \lambda_{14} = 47,\ \mu_{14} = 26\ ;\ \lambda_{15} = 64,\ \mu_{15} - 10\ ;$$

$$\lambda_{16} = 1,\ \mu_{16} = 81\ ;\ \lambda_{17} = 18,\ \mu_{17} = 65\ ;\ \lambda_{18} = 35,\ \mu_{18} = 49\ ;\ \lambda_{19} = 52,\ \mu_{19} = 33\ ;\ \lambda_{20} = 69,\ \mu_{20} = 17\ ;$$

$$\lambda_{21} = 86,\ \mu_{21} = 1\ ;\ \lambda_{22} = 6,\ \mu_6 = 88\ ;\ \ldots$$

Rappelons que le système $|C_0^{(i)}|$ a le point-base A multiple d'ordre $\lambda_i + \mu_i$. Les courbes $C_0^{(i)}$ n'ont que deux tangentes distinctes en A (unies pour I), l'une comptant pour λ_i, l'autre pour μ_i tangentes.

2. Les courbes C'_0 ont en A la multiplicité 12 et leur comportement en A est fixé par le schéma suivant :

$$A^{12},\ (\alpha,\ 1)^7,\ \ldots,\ (\alpha,\ 12)^7,\ (\alpha,\ 13)^4,\ (\alpha,\ 14)^1,\ \ldots,\ (\alpha,\ 112)^1,\ (\alpha,\ 13,\ 1)^3.$$

$$A^{12},\ (\beta,\ 1)^5,\ \ldots,\ (\beta,\ 17)^5,\ (\beta,\ 18)^3,\ (\beta,\ 19)^1\ \ldots,\ (\beta,\ 117)^1,\ (\beta,\ 18,\ 1)^2.$$

Le point A' est donc multiple d'ordre sept pour la surface Φ. Référons-nous à la surface Φ_1, projection de Φ à partir de A' sur un hyperplan.

Au domaine du point $(\alpha,\ 116)$ correspond sur Φ_1 une droite σ_a ; au domaine du point $(\alpha,\ 13,\ 1)$ correspond une cubique gauche τ_a ; au domaine de $(\beta,\ 18,\ 1)$ correspond une conique τ_β ; au domaine du point $(\beta,\ 117)$ correspond une droite σ_β.

Si n est l'ordre de la surface Φ, l'ordre de la surface Φ_1 est $n - 7$.

3. Les courbes C_0'' ont en A la multiplicité 24 et leur comportement en ce point a pour schéma

$$\begin{array}{l}
A^{24}, (\alpha, 1)^{14}, (\alpha, 2)^{9}, (\alpha, 3)^{5}, \ldots, (\alpha, 12)^{5}, (\alpha, 13)^{3}, (\alpha, 14)^{1}, \ldots, (\alpha, 112)^{1}.\\
\qquad (\alpha, 2, 1)^{4}, \qquad\qquad (\alpha, 13, 1)^{2}.\\
\qquad (\alpha, 2, 2),^{1} (\alpha, 2, 2, 1)_{1}, \ldots, (\alpha, 2, 2, 3)^{1}.
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
A^{24}, (\beta, 1)^{10}, (\beta, 2)^{10}, (\beta, 3)^{10}, (\beta, 4)^{5}, (\beta, 5)^{3}, \ldots, (\beta, 17)^{3}, (\beta, 18)^{2}, (\beta, 19)^{1}, \ldots, (\beta, 117)^{1},\\
\qquad (\beta, 4, 1)^{2}, \qquad\qquad (\beta, 18, 1)^{1}.\\
\qquad (\beta, 4, 2)^{2},\\
\qquad (\beta, 4, 3)^{1}, (\beta, 4, 3, 1)^{1}.
\end{array}$$

La surface Φ_2 est la projection de Φ_1 à partir du point A_1' commun aux courbes τ_α, τ_β, sur un hyperplan.

Sur la surface Φ_2, nous avons une droite σ_α, une conique τ_α, une droite ρ_{11} qui représente le domaine du point $(\alpha, 2, 1, 3)$, une droite ρ_{12} qui représente le domaine du point $(\beta, 4, 3, 1)$, une droite τ_β et une droite σ_β.

La surface Φ_2 a l'ordre $n - 9$, car le système $|C_0''|$ a le degré $199\ (n - 9)$; le point A_1' est donc double pour la surface Φ_1 et précisément double biplanaire, les plans tangents étant ceux qui projettent les droites ρ_{11}, ρ_{12}. Ces deux droites se coupent donc en un point A_2'.

4. Les courbes C_0''' ont la multiplicité 36 en A et leur comportement en ce point a pour schéma

$$\begin{array}{l}
A^{36}, (\alpha, 1)^{6}, (\alpha, 2)^{5}, \ldots, (\alpha, 12)^{5}, (\alpha, 13)^{3}, (\alpha, 14)^{1}, \ldots, (\alpha, 112)^{1},\\
\qquad (\alpha, 1, 1)^{1}, \qquad\qquad (\alpha, 13, 1)^{2}.\\
\qquad\quad \vdots\\
\qquad (\alpha, 1, 15)^{1}.
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
A^{36}, (\beta, 1)^{14}, (\beta, 1)^{3}, \ldots, (\beta, 17)^{3}, (\beta, 18)^{2}, (\beta, 19)^{1}, \ldots, (\beta, 117)^{1}.\\
\qquad (\beta, 1, 1)^{1}, (\beta, 1, 1, 2)^{1}, \ldots (\beta, 1, 1, 10)^{1}. (\beta, 18, 1)^{1}.
\end{array}$$

La surface Φ_3 est la projection de la surface Φ_2 à partir du point A_2' ; elle a l'ordre $n - 11$ et A_2' est donc double pour la surface Φ_2.

Sur la surface Φ_3 sont tracées : une droite σ_α, une conique τ_α, une droite ρ_{21} représentant le domaine du point $(\alpha, 1, 15)$, une droite ρ_{22} représentant le domaine du point $(\beta, 1, 1, 10)$, une droite τ_β et une droite σ_β. Le point A_2' est double biplanaire pour Φ_2 et les plans tangents sont ceux qui projettent de A_2' les droites ρ_{21}, ρ_{22}. Ces droites se rencontrent donc en un point A_3'.

5. Le point A est multiple d'ordre 37 pour les courbes $C_0^{(4)}$; le schéma du comportement de ces courbes en ce point est

$$
\begin{array}{l}
A^{37}, (\alpha, 1)^5, \ldots (\alpha, 12)^5, (\alpha, 13)^3, (\alpha, 14)^1, \ldots, (\alpha, 112)^1, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\alpha, 13, 1)^2. \\
A^{37}, (\beta, 1)^{13}, (\beta, 2)^3, \ldots, (\beta, 17)^3, (\beta, 18)^2, (\beta, 19)^1, \ldots, (\beta, 117)^1, \\
\qquad (\beta, 1, 1)^{10}, \qquad\qquad\qquad\qquad (\beta, 18, 1)^1. \\
\qquad (\beta, 1, 2)^9, (\beta, 1, 2, 1)^1, \\
\qquad\qquad\qquad (\beta, 1, 2, 1, 1)^1, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad\qquad (\beta, 1, 2, 1, 8)^1.
\end{array}
$$

La surface Φ_4 est la projection de la surface Φ_3 à partir du point A_3'. Celui-ci est simple pour la surface Φ_3 puisque la surface Φ_4 a l'ordre $n - 17$.

Les courbes tracées sur la surface Φ_4 sont : une droite σ_α, une conique τ_α, une droite ρ (exceptionnelle), de degré virtuel -1, représentant le domaine du point $(\beta, 1, 2, 1, 8)$, une droite τ_β et une droite σ_α.

6. Dans un travail antérieur [1], nous avons déduit l'ordre d'une involution en partant de la structure du point A'. Si, sur la surface Φ_1, le domaine de A' est représenté par une courbe σ_α d'ordre a_1, u_1 droites dont la première s'appuie sur σ_α, chacune des autres s'appuyant sur la précédente et la suivante, une courbe τ_α d'ordre m_1, t droites, une courbe τ_β d'ordre m_2, u_2 droites, une courbe σ_β d'ordre b_2, on a

[1] *Sur l'ordre d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique* (Bull. de la Soc. roy. des Sciences de Liège, 1953, pp. 77-84). Voir aussi notre première note, n° 3.

$$\begin{aligned} p = {} & [(t+1)U_1U_2 + (u_2+1)U_1 + (u_1+1)U_2]a_1b_2, \\ & + [(t+1)m_2U_1 + U_1 + m_2(u_1+1)]a_1 \\ & + [(t+1)m_1U_2 + U_2 + m_1(u_2+1)]b_2 \\ & + (t+1)m_1m_2 + m_1 + m_1, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$U_1 = m_1(u_1+1)+1, \qquad U_2 = m_2(u_2+1)+1.$$

Actuellement, on a $a_1 = 1$, $b_2 = 1$, $m_1 = 3$, $m_2 = 2$, $t = 4$, $p = 199$. En tenant compte de ces valeurs et de celles de α, β, on trouve facilement

$$u_1 = 0, \qquad u_2 = 0.$$

Sur Φ_1, le point commun à σ_α, τ_α et le point commun à τ_β, σ_β sont simples.

Les courbes qui, sur la surface Φ_1, donnent la structure du point A′, sont donc celles que nous avons rencontrées et on a

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \Gamma_0' + \sigma_\alpha + \tau_\alpha + \rho_{11} + \rho_{21} + \rho_{22} + \rho_{12} + \tau_\beta + \sigma_\beta, \\ \Gamma_0 &= \Gamma_0'' + \sigma_\alpha + \tau_\alpha + 2(\rho_{11} + \rho_{21} + \rho_{22} + \rho_{12}) + \tau_\beta + \sigma_\beta, \\ \Gamma_0 &= \Gamma_0''' + \sigma_\alpha + \tau_\alpha + 2\rho_{11} + 3(\rho_{21} + \rho_{22}) + 2\rho_{12} + \tau_\beta + \sigma_\beta. \end{aligned}$$

Les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ appartiennent totalement au système $|\Gamma_0'''|$, puisque ρ est une droite exceptionnelle.

7. Si l'on tient compte de la formation des surfaces Φ_2, Φ_3, Φ_4, on voit que sur Φ_4, la droite ρ rencontre τ_α en un point qui représente les droites ρ_{11}, ρ_{21} et τ_β en un point qui représente les droites ρ_{22}, ρ_{12}.

Les courbes $C_0^{(5)}$ ont en A la multiplicité 47. Comme on a $\lambda_5 = 3$, les courbes $C_0^{(5)}$ ne peuvent plus passer par le point $(\beta, 1, 2, 1, 8)$ et le schéma du comportement en A des branches des courbes $C_0^{(5)}$ passant par $(\beta, 1)$ est le suivant) :

$$A^{47}, (\beta, 1)^3, \ldots, (\beta, 17)^3, (\beta, 18)^2, (\beta, 19)^1, \ldots, (\beta, 117)^1,$$
$$(\beta, 18, 1)^1.$$

La surface Φ_5 est la projection, à partir du point A'_4 commun τ_α et à ρ, de la surface Φ_4. Comme ce point représente ρ_{11} et ρ_{21}, on a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(5)} + \sigma_\alpha + \tau_\alpha + 3\rho_{11} + 4\rho_{21} + 3\rho_{22} + 2\rho_{12} + \tau_\beta + \sigma_\beta.$$

On en conclut que les courbes $C_0^{(5)}$ passent une fois par $(\alpha, 13, 1)$, une fois par le point $(\alpha, 2, 1, 3)$ et deux fois par le point $(\alpha, 1, 15)$. On a donc le schéma suivant :

A^{47}, $(\alpha, 1)^{13}$, $(\alpha, 2)^7$, $(\alpha, 3)^3$, ..., $(\alpha, 12)^3$, $(\alpha, 13)^2$, $(\alpha, 14)^1$, ..., $(\alpha, 112)^1$.

$(\alpha, 1, 1)^2$, $(\alpha, 2, 1)^4$, $(\alpha, 13, 1)^1$.

$\vdots$ $(\alpha, 2, 2)^1$, $(\alpha, 2, 2, 1)^1$, ..., $(\alpha, 2, 2, 3)^1$.

$(\alpha, 1, 15)^2$.

Le point A'_4 est triple pour la surface Φ_4 et Φ_5 est d'ordre $n - 15$.

Sur la surface Φ_5, nous avons : une droite σ_α, une droite τ_α, une droite ρ_{11}, une conique ρ_{21}, une droite τ_β et une droite σ_β. La conique ρ_{21} rencontre la droite τ_β en un point A'_5 qui représente les droites ρ_{22} et ρ_{12}.

8. Les courbes $C_0^{(6)}$ ont en A la multiplicité 48, donc elles ne peuvent plus passer par le point $(\beta, 18, 1)$, sans quoi la somme des multiplicités de ces courbes en A, $(\beta, 1)$, ..., $(\beta, 117)$ serait supérieure à $p = 199$. D'autre part, puisque $\mu = 28$, ces courbes ne peuvent plus passer que 13 fois par le point $(\alpha, 1)$ et une fois que chacun des points $(\alpha, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 2)$, ..., $(\alpha, 1, 15)$. Il en résulte que sur la surface Φ_5, les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ sont découpées par les hyperplans passant par A'_5. On a par suite

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(6)} + \sigma_\alpha + \tau_\alpha + 3\rho_{11} + 4\rho_{21} + 4\rho_{22} + 3\rho_{12} + \tau_\beta + \sigma_\beta.$$

Les courbes $C_0^{(6)}$ passent une fois par $(\alpha, 112)$, une fois par $(\alpha, 13, 1)$, une fois par $(\alpha, 2, 1, 3)$, une fois par $(\alpha, 1, 15)$, une fois par $(\beta, 1, 1, 10)$, une fois par $(\beta, 4, 3, 1)$, une fois par $(\beta, 117)$.

Leur comportement en A est caractérisé par le schéma

$$\begin{array}{l}
A^{48}, (\alpha, 1)^{13}, (\alpha, 2)^{7}, (\alpha, 3)^{3}, \ldots, (\alpha, 12)^{3}, (\alpha, 13)^{2}, (\alpha, 14)^{1}, \ldots, (\alpha, 112)^{1}, \\
\quad (\alpha, 1, 1)^{1}, (\alpha, 2, 1)^{4} \qquad (\alpha, 13, 1)^{1}, \\
\quad \vdots \qquad (\alpha, 2, 2)^{1}, (\alpha, 2, 2, 1)^{1}, \ldots, (\alpha, 2, 2, 3)^{1}. \\
\quad (\alpha, 1, 15)^{1}. \\
\quad (\beta, 1, 1)^{1}, (\beta, 1, 1, 1)^{1}, \ldots, (\beta, 1, 1, 10)^{1}. \\
A^{48}, (\beta, 1)^{19}, (\beta, 2)^{18}, (\beta, 3)^{18}, (\beta, 4)^{3}, (\beta, 5)^{1}, \ldots, (\beta, 117)^{1}. \\
\qquad\qquad (\beta, 4, 1)^{2}, \\
\qquad\qquad (\beta, 4, 2)^{2}, \\
\qquad\qquad (\beta, 4, 3)^{1}, (\beta, 4, 3, 1)^{1}.
\end{array}$$

Sur la surface Φ_6, nous avons une droite σ_α, une droite τ_α, une droite ρ_{11}, une droite ρ_{21}, une droite ρ_{22} rencontrant ρ_{21} en un point A'_6, une droite ρ_{12} et une droite σ_β rencontrant ρ_{12} en un point qui représente τ_β.

La surface Φ_6 est d'ordre $n - 17$.

9. Passons aux courbes $C_0^{(7)}$. Elles ont en A la multiplicité 49. On a $\mu = 12$, donc les courbes $C_0^{(7)}$ ne peuvent plus passer par les points $(\alpha, 1, 1), \ldots, (\alpha, 1, 15)$. On a d'autre part $\lambda = 37$. Le point de Φ_6 d'où l'on projette cette surface pour obtenir Φ_7 doit appartenir à ρ_{22}, d'après ce qu'on vient de voir ; il ne peut donc appartenir à ρ_{12}. Le point $(\beta, 1)$ a donc la multiplicité 18 ; les courbes $C_0^{(7)}$ ne passent plus par le point $(\beta, 1, 1, 10)$. Le centre de projection de Φ_6 sur Φ_7 est donc le point A'_6 commun aux courbes ρ_{21}, ρ_{22}. Au domaine de ce point correspond sur F celui du point $(\beta, 1, 2, 1, 8)$, représenté par la droite exceptionnelle ρ.

Le comportement des courbes $C_0^{(7)}$ au point A a donc pour schéma

$$\begin{array}{l}
A^{49}, (\alpha, 1)^{12}, (\alpha, 2)^{7}, (\alpha, 3)^{3}, \ldots, (\alpha, 12)^{3}, (\alpha, 13)^{2}, (\alpha, 14)^{1}, \ldots, (\alpha, 112)^{1}. \\
\qquad (\alpha, 2, 1)^{4}, \qquad\qquad (\alpha, 13, 1)^{1}. \\
\qquad (\alpha, 2, 2)^{1}, (\alpha, 2, 2, 1)^{1}, \ldots, (\alpha, 2, 2, 3)^{1}, \\
\quad (\beta, 1, 2)^{9}, (\beta, 1, 2, 1)^{1}, (\beta, 1, 2, 1, 1)^{1}, \ldots, (\beta, 1, 2, 1, 8)^{1}. \\
\quad (\beta, 1, 1)^{10}, \\
A^{49}, (\beta, 1)^{18}, (\beta, 2)^{8}, (\beta, 3)^{8}, (\beta, 4)^{3}, (\beta, 5)^{1}, \ldots, (\beta, 117)^{1}. \\
\qquad\qquad (\beta, 4, 1)^{2}, \\
\qquad\qquad (\beta, 4, 2)^{2}, \\
\qquad\qquad (\beta, 4, 3)^{1}, (\beta, 4, 3, 1)^{1}.
\end{array}$$

Sur la surface Φ_7, les droites σ_α, τ_α, ρ_{11}, ρ_{12}, σ_β existent. La droite exceptionnelle ρ rencontre ρ_{11} en un point qui représente la droite ρ_{21} et rencontre également la droite ρ_{12} en un point qui représente la droite ρ_{22}.

La surface Φ_7 est d'ordre $n - 18$. Les courbes $\Gamma_0^{(7)}$ appartiennent totalement au système $|\Gamma_0^{(6)}|$.

10. Les courbes $C_0^{(8)}$ ont la multiplicité 59 en A. On a $\lambda = 8$, donc ces courbes ne peuvent plus passer par le point $(\beta, 1, 2, 1, 8)$. On a, pour les branches des courbes passant par le point $(\beta, 1)$, le schéma suivant :

$$\begin{array}{l} A^{59}, (\beta, 1)^8, (\beta, 2)^8, (\beta, 3)^8, (\beta, 4)^3, (\beta, 5)^1, \ldots, (\beta, 117)^1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\beta, 4, 1)^2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\beta, 4, 2)^2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\beta, 4, 3)^1, (\beta, 4, 3, 1)^1. \end{array}$$

Les multiplicités des points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$ doivent d'autre part être diminuées pour que la somme des multiplicités des courbes en A, $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, 112)$ soit égale à $p = 199$. On en conclut que les courbes $\Gamma_0^{(8)}$ sont découpées sur la surface Φ_7 par les hyperplans passant par le point A_7' commun à ρ et à ρ_{11}. Or, ce point représente ρ_{21} et en passant par projection à partir de A_7' de Φ_7 à Φ_8, on voit que l'on a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(8)} + \sigma_\alpha + \tau_\alpha + 3\rho_{11} + 5\rho_{21} + 4\rho_{22} + 3\rho_{12} + \tau_\beta + \sigma_\beta,$$

Les courbes $C_0^{(8)}$ passent trois fois par le point $(\alpha, 1, 15)$ et on a le schéma

$$\begin{array}{lll} A^{59}, & (\alpha, 1)^6, (\alpha, 2)^3, \ldots, (\alpha, 12)^3, & (\alpha, 13)^2, (\alpha, 14)^1, \ldots (\alpha, 112)^1, \\ & (\alpha, 1, 1)^3, & (\alpha, 13, 1)^1. \\ & \vdots & \\ & (\alpha, 1, 15)_3. & \end{array}$$

La surface Φ_8 est d'ordre $n - 21$ et A_7' est triple pour Φ_7. Sur la surface Φ_8 sont tracées : la droite σ_α, la droite τ_α, une cubique gauche ρ_{21} rencontrant τ_α est un point qui représente ρ_{11}, une droite ρ_{12} qui coupe ρ_{21} en un point qui représente ρ_{22}, et une droite σ_β.

11. Les courbes $C_0^{(9)}$ passent 60 fois par A. On a $\mu_9 = 35$, donc ces courbes passent deux fois par les points $(\alpha, 1, 1)$, ..., $(\alpha, 1, 15)$ et 5 fois par $(\alpha, 1)$. Elles ne peuvent d'autre part plus passer par $(\beta, 4, 3, 1)$ et les courbes $\Gamma_0^{(9)}$ sont découpées sur la surface Φ_8 par les hyperplans passant par le point A_8' commun aux courbes ρ_{21}, ρ_{12}. Ce point représente ρ_{22} et on a donc

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(9)} + \sigma_\alpha + \tau_\alpha + 3\rho_{11} + 5\rho_{21} + 5\rho_{22} + 3\rho_{12} + \tau_\beta + \sigma_\beta.$$

Les courbes $C_0^{(9)}$ passent deux fois par le point $(\beta, 1, 1, 10)$ et on a le schéma

$$\begin{array}{l}
A^{60},\ (\alpha, 1)^5,\ (\alpha, 2)^3, \ldots, (\alpha, 12)^3,\ (\alpha, 13)^2,\ (\alpha, 14)^1, \ldots, (\alpha, 112)^1, \\
\qquad (\alpha, 1, 1)^2, \qquad\qquad\qquad (\alpha, 13, 1)^1. \\
\qquad\quad \vdots \\
\qquad (\alpha, 1, 15)^2. \\
A^{60},\ (\beta, 1)^{23},\ (\beta, 2)^1, \ldots, (\beta, 117)^1, \\
\qquad (\beta, 1, 1)^2,\ (\beta, 1, 1, 1)^2, \ldots, (\beta, 1, 1, 10)^2.
\end{array}$$

Sur la surface Φ_9, d'ordre $n - 23$, se trouvent les droites σ_α, τ_α, une conique ρ_{21}, une conique ρ_{22} et une droite σ_β. Les coniques ρ_{21}, ρ_{12} se coupent en un point A_9', simple pour Φ_9, dont le domaine correspond à celui de $(\beta, 1, 2, 1, 8)$.

12. Les courbes $\Gamma_0^{(10)}$ sont découpées sur Φ_9 par les hyperplans passant par A_9'. Les courbes $C_0^{(10)}$ passent donc une fois par le point $(\beta, 1, 2, 1, 8)$; elles ont la multiplicité 61 en A et leur singularité en ce point est caractérisée par le schéma

$$\begin{array}{l}
A^{61},\ (\alpha, 1)^4,\ (\alpha, 2)^3, \ldots, (\alpha, 12)^3,\ (\alpha, 13)^2,\ (\alpha, 14)^1, \ldots, (\alpha, 112)^1, \\
\qquad (\alpha, 1, 1)^1, \qquad\qquad\qquad (\alpha, 13, 1)^1. \\
\qquad\quad \vdots \\
\qquad (\alpha, 1, 15)^1. \\
A^{61},\ (\beta, 1)^{22},\ (\beta, 2)^1, \ldots, (\beta, 117)^1, \\
\qquad (\beta, 1, 1)^{11},\ (\beta, 1, 1, 1)^1, \ldots, (\beta, 1, 1, 10)^1. \\
\qquad (\beta, 1, 2)^9,\ (\beta, 1, 2, 1)^1, \\
\qquad\qquad\qquad (\beta, 1, 2, 1, 1)^1, \\
\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\
\qquad\qquad\qquad (\beta, 1, 2, 1, 8)^1.
\end{array}$$

Sur la surface Φ_{10} sont tracées les droites σ_α, τ_α, ρ_{21}, ρ, ρ_{22} et σ_β. Cette surface est d'ordre $n - 24$ et les courbes $\Gamma_0^{(10)}$ appartiennent totalement au système $|\Gamma_0^{(9)}|$.

13. Les courbes $C_0^{(11)}$ ont la multiplicité 62 en A, donc elles ne peuvent plus passer par le point $(\alpha, 1, 15)$. Les branches de ces courbes passant par le point $(\alpha, 1)$ ont le comportement donné par $(\mu_{11} = 3)$.

$$\begin{gathered} A^{62}, (\alpha, 1)^3, \ldots, (\alpha, 12)^3, (\alpha, 13)^2, (\alpha, 14)^1, \ldots, (\alpha, 112)^1, \\ (\alpha, 13, 1)^1. \end{gathered}$$

La surface Φ_{11} est obtenue en projetant Φ_{10} du point commun à ρ et à ρ_{21}. On a

$$\begin{aligned} &A^{62}, (\beta, 1)^{21}, (\beta, 2)^1, \ldots, (\beta, 117)^1, \\ &\quad (\beta, 1, 1)^{10}, (\beta, 1, 1, 1)^1, \ldots, (\beta, 1, 1, 10)^1, \\ &\quad (\beta, 1, 2)^9, \\ &\quad (\beta, 1, 3)^9, \\ &\quad (\beta, 1, 4)^9, \\ &\quad (\beta, 1, 5)^1, (\beta, 1, 5, 1)^1, \ldots, (\beta, 1, 5, 8)^1. \end{aligned}$$

Au domaine du point $(\beta, 1, 5, 8)$ correspond sur la surface Φ_{11} une droite exceptionnelle ρ'. Sur cette surface sont tracées les droites σ_α, τ_α, la droite ρ' qui coupe τ_α en un point qui représente ρ_{11}, ρ_{21}, la droite ρ_{22} et la droite σ_β. Celle-ci coupe la précédente en un point qui représente ρ_{12} et τ_α. La surface Φ_{11} est d'ordre $n - 25$.

14. Les courbes $C_0^{(12)}$ passent 71 fois par le point A. On a $\lambda = 13$, donc ces courbes ne peuvent plus passer par le point $(\beta, 1, 5, 8)$. D'autre part, elles ne peuvent plus passer par le point $(\alpha, 13, 1)$, sans quoi la somme des multiplicités de ces courbes aux points A, $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, 112)$ serait supérieure à $p = 199$. Il en résulte que sur la surface Φ_{11}, les courbes $\Gamma_0^{(12)}$ sont découpées par les hyperplans passant par le point A'_{11}, commun aux droites τ_α et ρ'. Ce point représente les courbes ρ_{11}, ρ_{12}, donc on a

$$\Gamma_0 = \Gamma_0^{(12)} + \sigma_\alpha + \tau_\alpha + 4\rho_{11} + 6\rho_{21} + 5\rho_{22} + 3\rho_{12} + \tau_\beta + \sigma_\beta.$$

Les courbes $C_0^{(12)}$ passent donc une fois par $(\alpha, 2, 2, 3)$ et deux fois par le point $(\alpha, 1, 15)$. Leur singularité en A est caractérisée par le schéma suivant :

$$
\begin{array}{l}
A^{71}, (\alpha, 1)^{13}, (\alpha, 2)^5, (\alpha, 3)^1, \ldots, (\alpha, 112)^1. \\
\quad (\alpha, 1, 1)^3, (\alpha, 2, 1)^4, \\
\quad\quad \vdots \quad\quad (\alpha, 2, 2)^1, (\alpha, 2, 2, 1)^1, \ldots, (\alpha, 2, 2, 3)^1. \\
\quad (\alpha, 1, 15)^3. \\
A^{71}, (\beta, 1)^{12}, (\beta, 2)^1, \ldots, (\beta, 117)^1. \\
\quad (\beta, 1, 1)^1, (\beta, 1, 1, 2)^1, \ldots, (\beta, 1, 1, 10)^1.
\end{array}
$$

La surface Φ_{12} a l'ordre $n - 29$ et le point A'_{11} est triple pour Φ_{11}.

Sur la surface Φ_{12}, nous avons une droite σ_α, une droite ρ_{11} rencontrant σ_α en un point qui représente τ_α, une cubique gauche ρ_{21} rencontrant ρ_{11}, une droite ρ_{22} rencontrant ρ_{21} en un point A'_{12}, une droite σ_β rencontrant ρ_{22} en un point qui représente ρ_{12} et τ_β.

15. Les courbes $C_0^{(13)}$ ont en A la multiplicité 72. Les courbes $\Gamma_0^{(13)}$ sont découpées sur Φ_{12} par les hyperplans passant par le point A'_{13}, ce qui introduit, sur la surface Φ_{13}, la droite exceptionnelle ρ.

Les courbes $C_0^{(13)}$ passent une fois par $(\alpha, 112)$, une fois par $(\alpha, 2, 2, 3)$, deux fois par $(\alpha, 1, 15)$, une fois par $(\beta, 1, 2, 1, 8)$ et une fois par $(\beta, 117)$.

Sur la surface Φ_{13}, qui est d'ordre $n - 30$, se trouvent la droite σ_α, la droite ρ_{11}, une conique ρ_{21}, la droite exceptionnelle ρ et la droite σ_β.

Sur la surface Φ_{12}, les courbes $\Gamma_0^{(14)}$ sont découpées par les hyperplans touchant la cubique gauche ρ_{21} en A'_{12}, ce qui introduit sur la surface Φ_{14} la droite exceptionnelle ρ'.

Les courbes $C_0^{(14)}$ passent 73 fois par A, une fois par $(\alpha, 112)$, une fois par le point $(\alpha, 2, 2, 3)$, une fois par le point $(\alpha, 1, 15)$, une fois par le point $(\beta, 1, 5, 8)$, une fois par le point $(\beta, 117)$.

Sur la surface Φ_{14}, d'ordre $n - 31$, se trouvent les droites σ_α, ρ_{11}, ρ_{21}, la droite exceptionnelle ρ' et la droite σ_β.

Les courbes $\Gamma_0^{(15)}$ sont découpées sur la surface Φ_{12} par les hyperplans osculant la cubique gauche ρ_{21} en A'_{12}, ce qui fait apparaître, sur la surface Φ_{15}, une droite exceptionnelle ρ''.

Les courbes $C_0^{(15)}$ passent 74 fois par A, une fois par le point (α, 112), une fois par le point (α, 2, 2, 3), une fois par le point (β, 1, 7, 1, 6) et une fois par (β, 117).

Sur la surface Φ_{15}, d'ordre $n - 32$, se trouvent tracées : la droite σ_α, la droite ρ_{11} rencontrant σ_α en un point représentant τ_α, la droite exceptionnelle ρ'', rencontrant ρ_{11} en un point qui représente ρ_{21}, la droite σ_β rencontrant ρ'' en un point qui représente ρ_{22}, ρ_{12}, τ_β.

La branche de la courbe $C_0^{(15)}$ donnant naissance à la droite exceptionnelle ρ'' a le schéma

$$\begin{array}{ll}
A^{74}, & \\
(\beta, 1)^9, (\beta, 1, 1)^8, \ldots, (\beta, 1, 6)^8, (\beta, 1, 7)^7, \ldots, & \\
(\beta, 2)^1, & (\beta, 1, 7, 1)_1, (\beta, 1, 7, 1, 1)^1, \ldots, \\
\vdots & \qquad (\beta, 1, 7, 1, 6)^1.
\end{array}$$

16. Passons aux courbes $C_0^{(16)}$. Elles passent 82 fois par A et une fois par chacun des points (β, 1), (β, 2), ..., (β, 117). Elles ne peuvent plus passer par le point (α, 2, 2, 3) et par conséquent, sur la surface Φ_{15}, les courbes $\Gamma_0^{(16)}$ sont découpées par les hyperplans passant par le point A'_{15} commun aux droites ρ_{11} et ρ''. Ce point représente ρ_{21}, donc on a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(16)} + \sigma_\alpha + \tau_\alpha + 4\rho_{11} + 7\rho_{21} + 5\rho_{22} + 3\rho_{12} + \tau_\beta + \sigma_\beta.$$

On en conclut que les courbes $C_0^{(16)}$ passent six fois par le point (α, 1), une fois par chacun des points (α, 2), ..., (α, 112), cinq fois par chacun des points (α, 1, 1). ..., (α, 1, 15).

Sur la surface Φ_{16}, d'ordre $n - 37$, se trouvent une droite σ_α, une quintique gauche ρ_{21} rencontrant σ_α en un point représentant τ_α et ρ_{11}, une droite σ_β rencontrant ρ_{21} en un point qui représente ρ_{22}, ρ_{12} et τ_β.

17. Les courbes $C_0^{(17)}$ ont la multiplicité 83 en A et ne peuvent donc plus passer par le point (β, 117). On a $\mu = 65$, donc les courbes $C_0^{(17)}$ passent quatre fois par les points $(\alpha, 1, 1), \ldots, (\alpha, 1, 15)$ et cinq fois par le point $(\alpha, 1)$. Elles passent en outre une fois par les points $(\alpha, 2), \ldots, (\alpha, 112)$.

Sur la surface Φ_{16}, les courbes $\Gamma_0^{(17)}$ sont découpées par les hyperplans passant par le point commun à ρ_{21} et à σ_β, point qui représente ρ_{22}, ρ_{12} et τ_β. On a donc

$$\Gamma_0 = \Gamma_0^{(17)} + \sigma_\alpha + \tau_\alpha + 4\rho_{11} + 7\rho_{21} + 6\rho_{22} + 4\rho_{12} + 2\tau_\beta + \sigma_\beta.$$

Les courbes $C_0^{(17)}$ passant par suite trois fois par le point $(\beta, 18, 1)$ et une fois par le point $(\beta, 1, 1, 10)$. Les branches de ces courbes d'origine A passant par le point $(\beta, 1)$ donnent le schéma

$$\begin{array}{lll} & & (\beta,\ 18,\ 1)^3. \\ A^{83}, & (\beta,\ 1)^{17},\ (\beta,\ 2)^6, \ldots, (\beta,\ 17)^6, & (\beta,\ 18)^3. \\ & (\beta, 1, 1)^1, (\beta, 1, 1, 1)^1, \ldots, (\beta, 1, 1, 10)^1. & \end{array}$$

Sur la surface Φ_{17}, d'ordre $n - 41$, nous avons une droite σ_α, une quartique gauche rationnelle ρ_{21}, une droite ρ_{22} et une cubique gauche τ_β.

18. Les courbes $C_0^{(18)}$ passent 84 fois par A. On a $\mu_{18} = 35$, donc ces courbes ne peuvent passer que trois fois par les points $(\alpha, 1, 1), \ldots, (\alpha, 1, 15)$ et quatre fois par $(\alpha, 1)$.

Elles ne peuvent plus passer que 16 fois par $(\beta, 1)$, donc elles ne peuvent plus passer par le point $(\beta, 1, 1, 10)$. Les courbes $\Gamma_0^{(18)}$ sont donc découpées sur la surface Φ_{17} par les hyperplans passant par le point A'_{17} commun aux courbes ρ_{21}, ρ_{22}. Cela fait naître, sur la surface Φ_{18}, la droite exceptionnelle ρ.

Les courbes $C_0^{(18)}$ passent 16 fois par $(\beta, 1)$, une fois par $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 1, 1), \ldots, (\beta, 1, 1, 10)$, six fois par $(\beta, 2), \ldots, (\beta, 17)$ et trois fois par $(\beta, 18)$, $(\beta, 18, 1)$.

La surface Φ_{18}, d'ordre $n - 42$, contient la droite σ_α, la cubique gauche ρ_{21}, la droite exceptionnelle ρ et la cubique gauche τ_β.

Sur la surface Φ_{17}, les courbes $\Gamma_0^{(19)}$ sont découpées par les hyperplans touchant en A'_{17} la quartique ρ_{21}, ce qui fait naître sur la surface Φ_{19} la droite exceptionnelle ρ'.

Les courbes $C_0^{(19)}$ passent 85 fois par A, 3 fois par $(\alpha, 1)$, deux fois par $(\alpha, 1, 1), \ldots, (\alpha, 1, 15)$, une fois par $(\alpha, 2), \ldots, (\alpha, 112)$, 15 fois par $(\beta, 1)$, six fois par $(\beta, 2), \ldots, (\beta, 17)$, trois fois par $(\beta, 18), (\beta, 18, 1)$, neuf fois par $(\beta, 1, 1), \ldots, (\beta, 1, 4)$, une fois par $(\beta, 1, 5), (\beta, 1, 5, 1), \ldots, (\beta, 1, 58)$.

Sur la surface Φ_{19}, nous avons la droite σ_a, une conique ρ_{21}, une droite exceptionnelle ρ', une cubique gauche τ_β. Cette surface est d'ordre $n - 43$.

Les courbes $\Gamma_0^{(20)}$ sont découpées sur Φ_{17} par les hyperplans osculant la courbe ρ_{21} en A'_{17}, ce qui fait naître, sur la surface Φ_{20} la droite exceptionnelle ρ''.

Les courbes $C_0^{(20)}$ passant 86 fois par A, deux fois par $(\alpha, 1)$, une fois par $(\alpha, 1, 1), \ldots, (\alpha, 1, 15)$, 14 fois par $(\beta, 1)$, huit fois par $(\beta, 1, 1), \ldots, (\beta, 1, 6)$, 7 fois par $(\beta, 1, 7)$, une fois par $(\beta, 1, 7, 1)$, $(\beta, 1, 7, 1, 1), \ldots, (\beta, 1, 7, 1, 6)$. Aux autres points, elles ont le même comportement que les courbes $C_0^{(19)}$.

La surface Φ_{20}, d'ordre $n - 44$, contient deux droites σ_a, ρ_{21}, la droite exceptionnelle ρ'', la cubique gauche τ_β.

Les courbes $\Gamma_0^{(21)}$ sont découpées sur Φ_{17} par les hyperplans ayant un contact du troisième ordre avec la courbe ρ_{21} en A'_{17}, ce qui fait naître sur la surface Φ_{21}, une nouvelle droite exceptionnelle ρ'''.

Les courbes $C_0^{(21)}$ passent 87 fois par A, une fois par les points $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, 112)$, 13 fois par $(\beta, 1)$ six fois par $(\beta, 2), \ldots, (\beta, 17)$, trois fois par $(\beta, 18), (\beta, 18, 1)$, 7 fois par $(\beta, 1, 1), \ldots, (\beta, 1, 10)$, 3 fois par $(\beta, 1, 11)$, 3 fois par $(\beta, 1, 11, 1)$, une fois par $(\beta, 1, 11, 2)$, $(\beta, 1, 11, 2, 1)$, $(\beta, 1, 11, 2, 2)$. Au domaine de ce dernier point correspond la droite exceptionnelle ρ''' sur Φ_{21}.

La surface Φ_{21}, d'ordre $n - 45$, contient la droite σ_a ; la droite exceptionnelle ρ''' qui rencontre σ_a en un point qui représente τ_a, ρ_{11}, ρ_{21} ; la cubique gauche τ_β.

19. Les courbes $C_0^{(22)}$ passent 94 fois par A ; elles ne peuvent plus passer par les points $(\alpha, 112)$ et $(\beta, 1, 11, 2, 2)$, puisque $\lambda_{22} = 6$. Il en résulte que sur la surface Φ_{21}, les courbes $\Gamma_0^{(22)}$ sont découpées par les hyperplans passant par le point A'_{21} commun aux droites σ_a et ρ''' Ce point représente τ_a, ρ_{11}, ρ_{21}, donc on a

$$\Gamma_0 = \Gamma_0^{(22)} + \sigma_a + 2\tau_a + 5\rho_{11} + 8\rho_{21} + 6\rho_{22} + 4\rho_{12} + 2\tau_\beta + \sigma_\beta$$

Les courbes $C_0^{(22)}$ passent 94 fois par A, 13 fois par (α, 1), 8 fois par (α, 2), ..., (α, 12), quatre fois par (α, 13), (α, 13, 1), cinq fois par (α, 1, 1), ..., (α, 1, 15), six fois par (β, 1), ..., (β, 17), trois fois par (β, 18), (β, 18, 1).

Sur la surface Φ_{22}, d'ordre $n - 54$, se trouvent les courbes suivantes : une quartique gauche rationnelle τ_α, une quintique gauche rationnelle ρ_{21} et une cubique gauche τ_β. Les courbes τ_α, ρ_{21} se coupent en un point qui représente ρ_{11} et les courbes ρ_{21}, τ_β en un point qui représente ρ_{22}, ρ_{12}.

Nous ne croyons pas utile d'aller plus loin, la structure du point A est maintenant bien connue.

Liège, le 8 mars 1954.