Bulletin de la Classe des sciences

Recherches sur les points de diramation de troisième catégorie d'une surface multiple (3e note

Lucien Godeaux

Résumé
On considère une surface multiple d'ordre premier impair j), possédant un point de diramation isolé de seconde espèce et de troisième catégorie. Le cône tangent à la surface en ce point se décompose en quatre cônes rationnels (σα), (tα), (tß), (σß). On détermine les conditions nécessaires et suffisantes pour que le point infiniment voisin du point de diramation , situé sur la droite commune aux cônes(tα), (tß) soit double biplanaire.

Citer ce document / Cite this document :

Godeaux Lucien. Recherches sur les points de diramation de troisième catégorie d'une surface multiple (3e note. In: Bulletin de la Classe des sciences, tome 40, 1954. pp. 81-86;

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1954.68983;

https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1954_num_40_1_68983;

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Recherches sur les points de diramation de troisième catégorie d'une surface multiple.

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(Troisième note)

Résumé. — On considère une surface multiple d'ordre premier impair p, possédant un point de diramation isolé de seconde espèce et de troisième catégorie. Le cône tangent à la surface en ce point se décompose en quatre cônes rationnels (σ_α), (τ_α), (τ_β), (σ_β). On détermine les conditions nécessaires et suffisantes pour que le point infiniment voisin du point de diramation, situé sur la droite commune aux cônes (τ_α), (τ_β) soit double biplanaire.

Considérons un point de diramation isolé A' d'une surface Φ multiple d'ordre premier impair p. Nous supposons que Φ est l'image d'une involution cyclique I_p, d'ordre p, appartenant à une surface algébrique F. Soit A le point uni de cette involution homologue de A'. Pour étudier la singularité du point A', nous avons formé sur F, en partant du système $|C_0|$ transformé du système de sections hyperplanes de Φ, une suite de systèmes $|C_0'|$, $|C_0''|$, ... dont les multiplicités en A vont en croissant. Les courbes des premiers de ces systèmes ont en A des tangentes fixes t_1, t_2 (unies pour l'involution). Supposons que le système $|C_0'|$ ait en A la multiplicité $\lambda_1 + \mu_1$, avec λ_1 tangentes confondues avec t_1, μ_1 avec t_2. Eh bien, la condition nécessaire et suffisante pour que le point infiniment voisin de A' situé sur la droite commune aux cônes (τ_α), (τ_β) soit double biplanaire pour Φ et que le système $|C_0''|$ ait en A la multiplicité $2(\lambda_1 + \mu_1)$, avec $2\lambda_1$ tangentes confondues avec t_1 et $2\mu_1$ avec t_2.

Nous terminons cette note en examinant le système $|C_0'''|$ et les différentes hypothèses que l'on peut faire sur son comportement en A [1].

1. Dans notre première note, dont nous conservons les notations, nous avons supposé

$$\lambda_2 + \mu_2 < \lambda_2' + \mu_2' < \lambda_2'' + \mu_2''.$$

Rappelons que l'on a

$$\lambda_1 = b_2 U_2 + m_2 = b_2[m_2(u_2 + 1) + 1] + m_2,$$
$$\mu_1 = a_1 U_1 + m_1 = a_1[m_1(u_1 + 1) + 1] + m_1$$

et

$$\lambda_2' = (t + 2)\lambda_1 + M_2, \quad \mu_2' = \mu_1 - M_1,$$
$$\lambda_2'' = \lambda_1 - M_2, \quad \mu_2'' = (t + 2)\mu_1 + M_1,$$

où nous posons

$$M_1 = a_1(u_1 + 1) + 1, \qquad M_2 = b_2(u_2 + 1) + 1.$$

Les courbes $\overline{C}_0''$, qui correspondent aux valeurs λ_2', μ_2', passant a_1 fois par le point $(\alpha, \alpha - 1)$ et $m_1 - 1$ fois par le point P_α. Les courbes C_0'' ont les mêmes multiplicités en ces points et passent en outre au moins une fois par un autre point uni R_α du domaine A. On a donc $\mu_2 > \mu_2''$.

Un raisonnement analogue montre que l'on a $\lambda_2 > \lambda_2'$.

Dans notre première note, nous avons montré que λ_2, μ_2 devaient satisfaire à la relation

$$[(t + 1)\mu_1 + 2M_1](\lambda_2 - 2\lambda_1) + [(t + 1)\lambda_1 + 2M_2](\mu_2 - 2\mu_1) = 0$$

et nous avons considéré le cas $\lambda_2 = 2\lambda_1$, $\mu_2 = 2\mu_1$. Plus généralement, on peut avoir, à priori.

$$\lambda_2 = 2\lambda_1 + \rho_1, \qquad \mu_2 = 2\mu_1 + \rho_2.$$

où ρ_1, ρ_2 sont des entiers positifs. Dans tous les cas, on a

$$[(t + 1)\mu_1 + 2M_1]\rho_1 = [(t + 1)\lambda_1 + 2M_2]\rho_2$$

[1] Les deux premières notes ont paru dans le BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1953, pp. 1009-1019, 1083-1089.

et on peut par conséquent poser

$$\rho_1 = [(t+1)\lambda_1 + 2M_2]\rho, \qquad \rho_2 = [(t+1)\mu_1 + 2M_1]\rho.$$

On vérifie sans peine que les valeurs de λ_2, μ_2 considérées satisfont aux congruences

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \qquad \mu + \beta\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p)$$

2. Supposons que nous ayons

$$\lambda_2 = 2\lambda_1 + \rho_1, \qquad \mu_2 = 2\mu_1 - \rho_2.$$

Nous devons avoir $\mu_2 > \mu_2''$, c'est-à-dire

$$2\mu_1 - \rho_2 > \mu_2''.$$

On a

$$\rho_2 + t\mu_1 + M_1 < 0,$$

ce qui est impossible. Donc $\rho_2 = 0$.

Si l'on supposait

$$\lambda_2 = 2\lambda_1 - \rho_1, \qquad \mu_2 = 2\mu_1 + \rho_2,$$

l'inégalité $\lambda_2 > \lambda_2'$ donnerait

$$\rho_1 + t\lambda_1 + M_2 < 0,$$

d'où $\rho_1 = 0$.

Nous voyons donc que *si le point infiniment voisin du point de diramation* A' *de la surface* Φ, *situé sur la droite commune aux cônes* (τ_α), (τ_β) *est double biplanaire* ($t \geqslant 2$), *le système* $|C_0''|$ *correspond aux solutions* $\lambda_2 = 2\lambda_1$, $\mu_2 = 2\mu_1$ *des congruences*

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \qquad \mu + \beta\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p)$$

et réciproquement.

3. Nous allons maintenant supposer que le système $|C_0'''|$ coïncide avec le système $|\bar{C}_0''|$, c'est-à-dire que l'on a

$$\lambda_3 = \lambda_2' = (t+2)\lambda_1 + M_2, \qquad \mu_3 = \mu_2' = \mu_1 - M_1.$$

Sur la surface Φ_1, nous avons quatre courbes rationnelles

σ_α, τ_α, τ_β, σ_β et les courbes τ_α, τ_β se rencontrent en un point A_1' qui est double biplanaire pour la surface. Projetons celle-ci du point A_1' sur un hyperplan de l'espace ambiant ne passant pas A_1'. Nous obtenons une surface Φ_2 dont les sections hyperplanes Γ_0'' correspondent aux courbes C_0''. Sur la surface Φ_2, nous avons les courbes rationnelles suivantes : la courbe σ_α d'ordre a_1, la courbe τ_α d'ordre $m_1 - 1$, s'appuyant en un point sur σ_α, une droite ρ_α représentant le domaine du point R_α de F, une droite ρ_β représentant le domaine du point R_β sur F et rencontrant la droite ρ_α en un point A_2', une courbe τ_β d'ordre $m_2 - 1$, une courbe σ_β d'ordre b_2 s'appuyant en un point sur τ_β. Des droites ρ_α, ρ_β, l'une s'appuie en un point sur τ_α ou τ_β, la seconde sur celle de ces courbes qui ne rencontre pas ρ_α.

Désignons par Φ_3 la surface dont les sections hyperplanes Γ_0''' correspondent aux courbes C_0''' ; elle est projectivement identique à la projection de Φ_2 sur un hyperplan de l'espace ambiant à partir d'un point de cette surface qu'il s'agit de déterminer.

Les courbes $\bar{C}_0''$, qui coïncident avec les courbes C_0''', passent a_1 fois par le point $(\alpha, \alpha - 1)$ et $m_1 - 1$ fois par le point P_α, donc sur la surface Φ_3, la courbe σ_α est d'ordre a_1 et la courbe τ_α d'ordre $m_1 - 1$. D'autre part, d'après la construction des courbes $\bar{C}_0''$, elles ne peuvent passer par le point R_α. Le point d'où l'on projette Φ_2 pour obtenir Φ_3 ne peut donc appartenir à τ_α mais appartient à ρ_α.

Parmi les systèmes $|C_0^{(4)}|$, $|C_0^{(5)}|$, ..., se trouve le système $|\bar{\bar{C}}_0''|$, dont les courbes passent b_2 fois par le point $(\beta, \beta - 1)$ et $m_2 - 1$ fois par le point P_β, donc les courbes C_0''' ont au moins ces multiplicités en ces points et exactement ces multiplicités puisque ce sont celles des courbes C_0''. On en conclut que le point dont on projette Φ_2 sur Φ_3 ne peut appartenir à τ_β.

Le point de Φ_2 d'où l'on projette cette surface pour obtenir Φ_3 ne peut se trouver sur τ_α, τ_β mais doit se trouver sur ρ_α. Il ne peut être quelconque sur cette droite, car alors les courbes Γ_2''' coïncideraient avec les courbes Γ_0''. Il doit donc se trouver sur la droite ρ_β, c'est-à-dire coïncider avec le point A_2'.

Les courbes C_0''' ne passent ni par le point R_α, ni par le point R_β.

4. Examinons maintenant quel peut être le comportement des courbes C_0''' au point A.

Les courbes C_0''' passent

$$\lambda_3 + \mu_3 = (t + 2)\lambda_1 + \mu_1 + M_2 - M_1$$

fois par le point A, $\mu_2' = \mu_1 - M_1$ fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \theta_\alpha - 1)$, $a_1 + (m_1 - 1)\ (\eta_1 + 1)$ fois par le point (α, θ_α), a_1 fois par les points $(\alpha, \theta_\alpha + 1)$, ..., $(\alpha, a - 1)$.

Les cas suivants peuvent alors se présenter :

1° Le point A_2' est simple pour la surface Φ_2 et on a $t = 2$. Il existe alors une suite de points unis pour l'involution, se détachant de la suite $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, \beta - 1)$, infiniment voisins successifs du point de cette suite d'où elle se détache, communs à toutes les courbes C_0''', se terminant par un point uni de première espèce, R_β', simple pour les courbes C_0'''. Le domaine de ce point correspond au domaine de A_2' sur Φ_2.

Sur la surface Φ_3, on a une courbe σ_α d'ordre a_1, une courbe τ_α d'ordre $m_1 - 1$, une droite exceptionnelle ρ, représentant A_2', s'appuyant sur τ_α, une courbe τ_β d'ordre $m_2 - 1$ s'appuyant sur ρ, une courbe σ_β d'ordre b_2. Les points d'appui de la droite ρ sur τ_α, τ_β sont doubles coniques pour Φ_3.

2° Le point A_2' est double conique pour Φ_2 et on a $t = 3$.

Il existe une suite de points unis analogue à la précédente mais le dernier point R_β' est double pour les courbes C_0'''.

Sur la surface Φ_3, la droite exceptionnelle ρ est remplacée par une conique de degré — 2.

3° Le point A_2' est double biplanaire pour la surface Φ_2 et on a $t \geqslant 4$.

Il existe alors deux suites de points unis analogues aux précédentes, se terminant par des points R_β', R_β'', unis de première espèce pour l'involution et simples pour les courbes C_0'''.

Sur la surface Φ_3, la droite exceptionnelle ρ est remplacée par deux droites ρ_1, ρ_2, de degré — 2, se rencontrant et s'appuyant l'une sur τ_α, l'autre sur τ_β, les points d'appui étant doubles coniques pour la surface Φ_3.

5. On pourrait envisager le cas où le premier système $|C'_0|$, $|C''_0|$, ... coïncidant avec $|\overline{C}''_0|$ serait le système $|C_0^{(k+1)}|$. On aurait alors

$$\lambda_i = i\lambda_1, \quad \mu_i = i\mu_1, \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

On devrait avoir dans ces conditions

$$k(\lambda_1 + \mu_1) < (t+2)\lambda_1 + \mu_1 + M_2 - M_1$$

et on aurait d'ailleurs $t \geqslant 2k$.

En confrontant l'inégalité précédente avec l'inégalité (II) de notre première note, on obtient

$$(k+1)(M_1 - M_2) < (t+1)(t - 2k + 3)\mu_1.$$

qui est à priori possible.

On aurait

$$\lambda_{k+1} = (t+2)\lambda_1 + M_2, \qquad \mu_{k+1} = \mu_1 - M_1.$$

L'examen des courbes $C_0^{(k+1)}$ se ferait comme dans le cas qui vient d'être étudié (nos 3 et 4).

Liège, le 20 janvier 1954.