Bulletin de la Classe des sciences

Recherches sur les points de diramation de troisième catégorie d'une surface multiple (4e note

Lucien Godeaux

Résumé

En un point de diramation de seconde espèce et de troisième catégorie d'une surface multiple d'ordre premier impair, la surface possède un cône tangent décomposé en quatre cônes rationnels $(\sigma\alpha)$ $(\tau\alpha)$ $(\tau\beta)$ $(\sigma\beta)$. Nous avons déterminé les conditions pour que le point infiniment voisin du point de diramation, situé sur la droite commune aux cônes $(\tau\alpha)$ $(\tau\beta)$ soit double biplanaire. Nous montrons dans cette note, en construisant un exemple, l'existence effective de cette singularité.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Recherches sur les points de diramation de troisième catégorie d'une surface multiple,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(*Quatrième note*).

Résumé. — En un point de diramation de seconde espèce et de troisième catégorie d'une surface multiple d'ordre premier impair, la surface possède un cône tangent décomposé en quatre cônes rationnels (σ_α), (τ_α), (τ_β) et (σ_β). Nous avons déterminé les conditions pour que le point infiniment voisin du point de diramation, situé sur la droite commune aux cônes (τ_α), (τ_β) soit double biplanaire. Nous montrons dans cette note, en construisant un exemple, l'existence effective de cette singularité.

Considérons une surface algébrique F contenant une involution cyclique d'ordre p n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Soit Φ une surface normale image de cette involution, sur laquelle les points de diramation sont isolés. Nous supposons p premier impair.

Soient A un point uni de seconde espèce et de troisième catégorie de l'involution, A' le point de Φ correspondant. Pour étudier la structure des points A et A', nous avons, en désignant par $|C_0|$ le système transformé sur F de celui des sections hyperplanes de Φ, considéré les systèmes $|C_0'|$, $|C_0''|$,... formés de courbes C_0 passant par A et dont les multiplicités en A vont en croissant. Pour que le point infiniment voisin de A' situé sur la droite commune aux cônes (τ_α), (τ_β) soit double pour Φ, il faut que la multiplicité des courbes C_0'' en A soit double de celui des courbes C_0'. Nous nous proposons de montrer, sur un exemple, que ce point peut effectivement être double biplanaire.

Nous conservons, sans les définir à nouveau, les notations des trois premières notes (1).

1. Considérons sur la surface F une involution cyclique d'ordre $p = 61$ n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Soit A un de ces points unis auquel sont attachés les nombres $\alpha = 39$, $\beta = 36$.

Le système $|C_0^{(i)}|$ a en A la multiplicité $\lambda_i + \mu_i$, λ_i tangentes étant confondues avec la droite unie $A(\beta, 1)$ et μ_i avec la droite unie $A(\alpha, 1)$. Les nombres λ_i, μ_i satisfont aux congruences

$$\lambda_i + 39\mu_i \equiv 0, \quad \mu_i + 36\lambda_i \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 61).$$

Les solutions de ces congruences, rangées pour nombres croissants $\lambda_i + \mu_i$, sont :

$$\lambda_1 = 5,\ \mu_1 = 3\ ;\ \lambda_2 = 10,\ \mu_2 = 6\ ;\ \lambda_3 = 3,\ \mu_3 = 14\ ;\ \lambda_4 = 22,\ \mu_4 = 1\ ;\ \lambda_5 = 15,\ \mu_5 = 9\ ;$$

$$\lambda_6 = 8,\ \mu_6 = 17\ ;\ \lambda_7 = 1,\ \mu_7 = 25\ ;\ \lambda_8 = 27,\ \mu_8 = 4\ ;\ \ldots.$$

Les courbes C_0' ont donc en A la multiplicité 8 et, en utilisant les méthodes et les notations que nous avons définies antérieurement (2), la singularité de ces courbes en A est fixée par le schéma suivant :

$$\begin{array}{lll}
 & A^8,\ (\beta, 1)^5, \ldots, (\beta, 4)^5, & (\beta, 5)^3,\ (\beta, 6)^1, \ldots, (\beta, 35)^1. \\
 & (\alpha, 1)^3, & (\beta, 5, 1)^2. \\
 & \vdots & \\
 & (\alpha, 7)^3, & \\
(\alpha, 8, 1)^1, & (\alpha, 8)^2, & \\
 & (\alpha, 9)^1, & \\
 & \vdots & \\
 & (\alpha, 38)^1. &
\end{array}$$

(1) Les trois premières notes ont été publiées dans le BULLETIN DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1953, pp. 1009-1019 ; 1083-1089 ; 1954, pp. 81-86.

(2) Voir notre *Mémoire sur les surfaces multiples* (MÉMOIRE IN-8° DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1953).

La surface Φ possède donc, au point de diramation A′ homologue de A, la multiplicité cinq ; le cône tangent à la surface en ce point se scinde en trois plans et un cône du second ordre.

Considérons la surface Φ_1 projection, à partir de A′, de la surface Φ sur un hyperplan de l'espace ambiant. Si N est l'ordre de Φ, Φ_1 est d'ordre N — 5.

Sur la surface Φ_1, il correspond au domaine du point $(\alpha, 38)$, une droite σ_α, de degré virtuel — 2 ; au domaine du point $(\alpha, 8, 1)$, une droite τ_α de degré virtuel — 3 ; au domaine du point $(\beta, 5, 1)$, une conique τ_β de degré virtuel — 4 ; enfin, au domaine du point $(\beta, 35)$, une droite σ_β de degré virtuel — 2. La droite τ_α coupe σ_α et τ_β chacune en un point ; τ_β et σ_β se coupent en un point. Il n'existe aucun autre point commun à deux de ces courbes.

2. Les courbes C_0'' ont en A la multiplicité 16 et leur singularité en ce point est fixée par le schéma suivant :

$$\begin{array}{lllll}
 & & A^{16}, & (\beta,1)^4, (\beta,2)^3, \ldots, (\beta,4)^3, & (\beta,5)^2, (\beta,6)^1, \ldots, (\beta,35)^1, \\
 & & (\alpha,1)^6, & (\beta,1,1)^1, & (\beta,5,1)^1. \\
(\alpha,2,2)^1, & (\alpha,2,1)^2, & (\alpha,2)^3, & \quad\vdots & \\
(\alpha,2,2,1)^1, & & (\alpha,3)^1, & (\beta,1,6)^1. & \\
 & & \quad\vdots & & \\
 & & (\alpha,38)^1. & &
\end{array}$$

Il en résulte que les courbes Γ_0'', qui correspondent sur Φ_1 aux courbes C_0'', sont découpées sur cette surface par les hyperplans passant par le point A_1' commun aux courbes τ_α, τ_β.

Soit Φ_2 la surface obtenue en projetant de A_1' la surface Φ_1 sur un hyperplan de l'espace ambiant. La surface Φ_2 est d'ordre N — 7 et le point A_1' est donc double pour Φ_1.

Sur la surface Φ_2, il correspond au domaine du point $(\alpha, 38)$ la projection de la droite σ_α, que nous continuerons à désigner par le même symbole ; au domaine du point $(\beta, 5, 1)$ une droite τ_β ; au domaine du point $(\beta, 35)$, une droite σ_β ; au domaine du point $(\alpha, 1, 2, 1)$ une droite ρ_1 de degré virtuel — 2 ; au domaine du point $(\rho, 1, 6)$ une droite ρ_2 de degré virtuel — 2. Au domaine du point $(\alpha, 8, 1)$ correspond le domaine d'un point A''_{12}, situé sur la droite σ_α.

3. Les courbes C_0''' ont en A la multiplicité 17 et leur comportement en ce point a pour schéma :

$$\begin{array}{lll}
 & A^{17}, (\beta, 1)^3, \ldots, (\beta, 4)^3, & (\beta, 5)^2, (\beta, 6)^1, \ldots, (\beta, 35)^1. \\
(\alpha, 1, 2)^1, (\alpha, 1, 1)^6\, (\alpha, 1)^7, & & (\beta, 5, 1)^1. \\
(\alpha, 1, 2, 1)^1, \quad (\alpha, 2)^1, & & \\
\quad\vdots \qquad\qquad \vdots & & \\
(\alpha, 1, 2, 5)^1. \quad (\alpha, 38)^1. & &
\end{array}$$

Il en résulte que sur la surface Φ_2 correspondent aux courbes C_0''' les sections Γ_0''' de cette surface par les hyperplans passant par un point A_2' commun aux droite ρ_1, ρ_2.

Nous désignerons par Φ_3 la projection de Φ_2 à partir de A_2' sur un hyperplan de l'espace ambiant. Sur la surface Φ_3 se trouvent tracée une droite σ_α, une droite τ_β et une droite σ_β. Cette surface est d'ordre $N - 8$, par conséquent, le point A_2' est simple pour Φ_2. Au domaine de A_2' sur Φ_2, c'est-à-dire au domaine du point $(\alpha, 1, 2, 5)$ sur F, correspond sur Φ_3 une droite exceptionnelle ρ (de degré virtuel -1).

4. Les courbes $C_0^{(4)}$ ont en A la multiplicité 23 et leur comportement en ce point est fixé par le schéma :

$$\begin{array}{ll}
 & A^{23}, (\beta, 1)^4, (\beta, 2)^1, \ldots, (\beta, 35)^1 \\
(\alpha, 1)^1 & (\beta, 1, 1)^3, \\
\vdots & \vdots \\
(\alpha, 38)^1, & (\beta, 1, 6)^3.
\end{array}$$

Sur la surface Φ_3, les courbes $\Gamma_0^{(4)}$, homologues des courbes $C_0^{(4)}$, sont découpées par les hyperplans passant par un point A_3' commun à la droite exceptionnelle ρ et à la droite τ_β, puisque les points $(\alpha, 1, 2, 5)$ et $(\beta, 5, 1)$ n'appartiennent plus aux courbes $C_0^{(4)}$. On peut encore dire que sur Φ_2, les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ sont découpées sur cette surface par les hyperplans passant par la droite ρ_2.

Il résulte également de ceci que la droite ρ_1, sur la surface Φ_2, passe par le point A''_{12} de la droite σ_α qui représente le domaine du point $(\alpha, 8, 1)$.

Sur la surface Φ_3, le domaine du point $(\beta, 1, 6)$ est représenté par le domaine du point commun à la droite exceptionnelle ρ et à la droite τ_β.

Sur la surface Φ_4, projection de Φ_3 à partir de A'_3, nous avons une droite σ_α, une cubique gauche ρ_2 rencontrant σ_α en un point qui représente τ_α et ρ_1, une droite σ_β coupant ρ_2 en un point qui représente τ_β. La surface Φ_4 est d'ordre $N - 11$ et le point A'_3 est triple pour Φ_3.

5. Les courbes $C_0^{(5)}$ ont en A la multiplicité 24. Comme on a $\lambda_5 = 15$, il faut nécessairement que les courbes $C_0^{(5)}$ ne passent plus que deux fois par les points $(\beta, 1, 1), \ldots, (\beta, 1, 6)$, par suite trois fois par le point $(\beta, 1)$ et une fois par les points $(\beta, 2), \ldots, (\beta, 35)$.

D'autre part, les courbes $C_0^{(5)}$ ne peuvent plus passer par le point $(\alpha, 38)$, car autrement la somme des multiplicités de ces courbes aux points A, $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, 38)$ serait supérieure à 61.

Il en résulte que sur la surface Φ_4 il correspond aux courbes $C_0^{(5)}$ les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ découpées par les hyperplans passant par le point A'_4 commun à ρ_2 et à σ_α. Comme nous l'avons vu, ce point représente les droites ρ_1 et τ_α, donc les courbes $C_0^{(5)}$ passeront par les points $(\alpha, 2, 2, 1)$ et $(\alpha, 8, 1)$.

Cela étant, le schéma de la singularité des courbes $C_0^{(5)}$ au point A est le suivant :

$$
\begin{array}{llll}
 & & A^{24}, & (\beta, 1)^3, (\beta, 2)^1, \ldots, (\beta, 35)^1. \\
 & & (\alpha, 1)^9, & (\beta, 1, 1)^2, \\
(\alpha, 2, 2)^1, & (\alpha, 2, 1)^2, & (\alpha, 2)^6, & \vdots \\
(\alpha, 2, 2, 1)^1, & & (\alpha, 3)^4, & (\beta, 1, 6)^2, \\
 & & \vdots & \\
 & & (\alpha, 7)^4, & \\
 & (\alpha, 8, 1)^2, & (\alpha, 8)^2, &
\end{array}
$$

Appelons Φ_5 la projection de Φ_4 à partir de A_4' sur un hyperplan. La surface Φ_4 est d'ordre N — 14 et le point A_4' est triple pour Φ_4.

Sur la surface Φ_5 sont tracées : une conique τ_α, une droite ρ_1 coupant τ_α en un point, une conique ρ_2 coupant ρ_1 en un point, une droite σ_β coupant ρ_2 en un point qui représente la courbe τ_β. A la courbe σ_α correspond un point (singulier) de la conique τ_α.

6. Les courbes $C_0^{(6)}$ ont la multiplicité 25 en A. On a $\lambda_6 = 8$, donc les courbes $C_0^{(6)}$ passent une fois par les points $(\beta, 1, 1)$, ..., $(\beta, 1, 6)$ et par les points $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, 35)$, deux fois par le point $(\beta, 1)$. Il s'ensuit que sur la surface Φ_5, les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ qui correspondent aux courbes $C_0^{(6)}$ sont découpées par les hyperplans passant par le point A_5' commun à la droite ρ_1 et à la conique ρ_2. Nous avons vu qu'à ce point correspondait la droite exceptionnelle ρ_6 représentant le point $(\alpha, 1, 2, 5)$. Par conséquent les courbes $C_0^{(6)}$ passent simplement par le point $(\alpha, 1, 2, 5)$, mais ne passent plus par le point $(\alpha, 2, 2, 1)$. Effectivement, le schéma de leur singularité en A est

$$
\begin{array}{lll}
 & & A^{25},\ (\beta, 1)^2,\ (\beta, 2)^1,\ \dots,\ (\beta, 35)^1. \\
(\alpha, 1, 2)^1,\ (\alpha, 1, 1)^6, & (\alpha, 1)^{10}, & (\beta, 1, 1)^1, \\
(\alpha, 1, 2, 1)^1, & (\alpha, 2)^4, & \vdots \\
\vdots & \vdots & (\beta, 1, 6)^1. \\
(\alpha, 1, 2, 5)^1. & \vdots & \\
 & (\alpha, 7)^4, & \\
 & (\alpha, 8, 1)^2,\ (\alpha, 8)^2. &
\end{array}
$$

Sur la surface Φ_6, dont les sections hyperplanes $\Gamma_0^{(6)}$ correspondent aux courbes $C_0^{(6)}$, nous avons une conique τ_α, une droite exceptionnelle ρ coupant τ_α en un point qui représente ρ_1, une droite ρ_2 coupent ρ en un point, une droite σ_β qui coupe ρ_2 en un point qui représente τ_β.

La surface Φ_6 est d'ordre N — 15.

7. Les courbes $C_0^{(7)}$ ont en A la multiplicité 26. On a $\lambda_7 = 1$, donc les courbes $C_0^{(7)}$ passent une fois par chacun des points $(\beta, 1), \ldots, (\beta, 35)$. Sur la surface Φ_6, les courbes $\Gamma_0^{(7)}$ qui représentent $C_0^{(7)}$ sont découpées par les hyperplans passant par le point A_6' commun aux droites ρ et ρ_2.

La singularité des courbes $C_0^{(7)}$ au point A a pour schéma

$$
\begin{array}{lr}
 & A^{26}, (\beta, 1)^1, \ldots, (\beta, 35)^1. \\
(\alpha, 1, 4)^1, (\alpha, 1, 3)^5, \ldots, (\alpha, 1, 1)^5, & (\alpha, 5)^9, \\
(\alpha, 1, 4, 1)^1, & (\alpha, 2)^4, \\
\vdots & (\alpha, 3)^4, \\
(\alpha, 1, 4, 4)^1. & \vdots \\
 & (\alpha, 7)^4, \\
 & (\alpha, 8, 1)^2, (\alpha, 8)^2.
\end{array}
$$

La surface Φ_7, dont les sections hyperplanes sont les courbes $\Gamma_0^{(7)}$, est d'ordre $N - 16$. Elle contient une conique σ_6 et une droite σ_β. Au domaine du point $(\alpha, 1, 4, 4)$ correspond une droite exceptionnelle ρ' qui s'appuie en un point sur σ_α, ce point (singulier) représentant les courbes τ_α et ρ_1, et en un point sur σ_α, point qui représente les courbes ρ_2 et τ_β.

8. Les courbes $C_0^{(8)}$ ont en A la multiplicité 31 ; elles ne peuvent donc plus passer par le point $(\beta, 35)$. On a $\mu_8 = 4$, donc ces courbes ne peuvent plus passer par le point $(\alpha, 1, 4, 4)$. Il en résulte qu'il leur correspond sur Φ_7 des courbes $\Gamma_0^{(8)}$ découpées par les hyperplans passant par le point A_7' commun aux droites ρ', σ_β. Nous avons vu que ce point représente les courbes τ_β et ρ_2, donc les courbes $C_0^{(8)}$ doivent passer par les points $(\beta, 5, 1)$ et $(\beta, 1, 6)$.

Dans ces conditions, on trouve comme schéma de la singularité des courbes $C_0^{(8)}$ au point A :

$$
\begin{array}{llll}
 & & A^{31}, (\beta, 1)^9, (\beta, 2)_6, \ldots, (\beta, 4)^6, (\beta, 5)^3, & \\
 & (\alpha, 1)^4, & (\beta, 1, 1)^3, & (\beta, 5, 1)^3. \\
 & \vdots & \vdots & \\
 & (\alpha, 7)^4, & (\beta, 1, 6)_3, & \\
(\alpha, 8, 1)^2, (\alpha, 8)^2, & & &
\end{array}
$$

Le point A_7' est donc sextuple pour la surface Φ_7 et la surface Φ_8, dont les sections hyperplanes sont les courbes $\Gamma_0^{(8)}$, a l'ordre N — 22.

La surface Φ_8 contient une conique τ_α, une cubique gauche ρ_2 rencontrant σ_α en un point singulier qui représente la courbe ρ_1, une cubique gauche τ_β qui coupe ρ_2 en un point. A la droite σ_β correspond un point singulier de la courbe τ_β.

9. La singularité de la surface Φ au point de diramation A′ est maintenant bien connue.

Au point A′, *la surface Φ possède un point quintuple, le cône tangent se scindant en un plan (σ_α), un plan (τ_α) coupant (σ_α) suivant une droite, un cône du second ordre (τ_β) coupant (τ_α) suivant une droite, un plan σ_β coupant le cône (τ_β) suivant une droite. Le point infiniment voisin de* A′ *sur la droite commune à (τ_α), (τ_β) est double biplanaire pour la surface Φ.*

Sur la surface Φ, on a les relations fonctionnelles

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_\alpha + \tau_\alpha + \rho_1 + \rho_2 + \tau_\alpha + \sigma_\beta,$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0'' + \sigma_\alpha + \tau_\alpha + 2(\rho_1 + \rho_2) + \tau_\beta + \sigma_\beta,$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(4)} + \sigma_\alpha + \tau_\alpha + 2\rho_1 + 3\rho_2 + \tau_\beta + \sigma_\beta,$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(5)} + \sigma_\alpha + 2\tau_\alpha + 3\rho_1 + 3\rho_2 + \tau_\beta + \sigma_\beta.$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(8)} + \sigma_\alpha + 2\tau_\alpha + 3\rho_1 + 4\rho_2 + 2\tau_\beta + \sigma_\beta.$$

Les courbes Γ_0''' appartiennent totalement au système $|\Gamma_0''|$ et les courbes $\Gamma_0^{(6)}$, $\Gamma_0^{(7)}$ au système $|\Gamma_0^{(5)}|$.

10. On pourrait poursuivre l'étude des singularités en A des courbes $C_0^{(9)}$, ... Bornons-nous aux courbes $C_0^{(9)}$.

Sur la surface Φ_8, les courbes $\Gamma_0^{(9)}$ qui correspondent aux courbes $C_0^{(9)}$ sont découpées par les hyperplans passant par le point A_8' commun aux courbes τ_α, ρ_2. Les courbes $C_0^{(9)}$ ne passent donc plus que deux fois par les points (β, 1, 1), ..., (β, 1, 6) et 8 fois par le point (β, 1). On en conclut $\lambda_9 = 20$ et $\lambda_8 + \mu_8 = 32$, d'où $\mu_8 = 12$.

Les courbes $C_0^{(9)}$ ne passent plus qu'une fois par le point (α, 8, 1), par le point (α, 8), deux fois par le point (α, 7). De plus, elles passent au moins deux fois par le point (α, 2, 2, 1). On trouve facilement qu'elles passent 12 fois par (α, 1), 6 fois par (α, 2), deux fois par (α, 3), ..., (α, 7), une fois par (α, 8), une fois par (α, 8, 1), quatre fois par (α, 2, 1), deux fois par (α, 2, 2) et par (α, 2, 2, 1).

On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(9)} + \sigma_\alpha + 2\tau_\alpha + 4\rho_1 + 4\rho_2 + 2\tau_\beta + \sigma_\beta.$$

Liège, le 1er mars 1954.