M² 4 m, 8.

SUR DEUX MODÈLES PROJECTIFS D'UNE SURFACE DE GENRE UN

PAR

LUCIEN GODEAUX
(à Liège.)

Récemment, M.M. F. Enriques [1]) et F. Severi [2]) ont repris l'étude des surfaces algébriques dont la courbe canonique est d'ordre zéro et par conséquent dont le genre géométrique est égal à l'unité. La généralisation d'un théorème classique de François Deruyts [3]) nous a amené à deux modèles projectifs d'une telle surface, modèles que nous nous proposons de décrire dans cette note.

1. Théorème I. — *Si un triangle se déforme de telle manière que deux de ses côtés s'appuient sur deux couples de droites fixes, les sommets opposés se mouvant sur les rayons homologues de deux faisceaux homographiques, le troisième sommet décrira une surface du quatrième ordre* Φ_4.

La démonstration de ce théorème est aisée lorsque l'on utilise le principe de correspondance de Chasles, nous ne la reprendrons pas ici.

Désignons par a_{11}, a_{12}; a_{21}, a_{22} les deux couples de droites fixes, par O_1, π_1; O_2, π_2 respectivement les sommets et les plans des deux faisceaux.

La surface Φ_4 passe évidemment par les quatre droites a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} et par les points O_1, O_2. La droite b_1 issue

1) *Le superficie di genere* I. Rendiconti delle Sessioni della R. Accademia delle Scienze di Bologna, 1908—1909.

2) *Le superficie algebriche con curva canonica d'ordine zero*, Atti del R. Instituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti 1908—1909, t. LXVIII, pp. 249—260. Voir aussi. Maroni. Rend. Ist. Lomb. 1905.

3) *Généralisation d'un théorème de* François Deruyts. Ce travail paraîtra dans les Mémoires de la Société des Sciences, Arts et Lettres du Hainaut, 1909, (7), I.

de O_1 et s'appuyant sur les droites a_{11}, a_{12} appartient à la surface, de même que la droite b_2, issue de O_2 et s'appuyant sur les droites a_{21}, a_{22}. La droite commune aux plans π_1, π_2 est une bitangente de la surface, les points de contact étant les points unis des ponctuelles projectives marquées sur cette droite pour les faisceaux de rayons (O_1), (O_2).

Ou s'assure aisément que la surface Φ_4 ne possède aucun point double.

Nous représenterons par Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 les coniques situées respectivement dans les plans (b_1, a_{11}), (b_1, a_{12}), (b_2, a_{21}), (b_2, a_{22}). Remarquons que ces coniques ne se rencontrent pas deux à deux.

La surface Φ_4 possède un faisceau linéaire de courbes elliptiques du quatrième ordre. En effet, considérons deux rayons r_1, r_2 homologues dans les faisceaux (O_1), $O_2)$. Les points communs à la quadrique engendrée pour les droites s'appuyant sur r_1, a_{11}, a_{12} et à la quadrique engendrée pour les droites qui s'appuyent sur r_2, a_{21}, a_{22} appartiennent à la surface Φ_4; ces points forment généralement une courbe elliptique du quatrième ordre s'appuyant en deux points sur chacune des droites a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}. Lorsque la droite r_1 (ou r_2) décrit le faisceau (O_1) [ou (O_2)], la courbe du quatrième ordre décrit un faisceau évidemment linéaire, mais dépourvu de point de base. De l'existence de ce faisceau de quartiques elliptiques, ou ne peut pas conclure que la surface Φ_4 est birationnellement identique à une règlée, car alors le faisceau aurait un point de base simple, ce qui n'a pas lieu ici [1]).

2. Considérons le système des courbes variables découpées par les surfaces cubiques passant par les droites a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, et dénotons le par $|A|$. Le système linéaire $|A|$ est du quatrième degré, et puisque la courbe canonique est d'ordre nul, il est son propre adjoint. Les groupes de la série canonique d'une courbe A sont donc des groupes caractéristiques du système $|A|$ On en déduit qu'une courbe A est de genre trois. La dimension de la série canonique d'une courbe A étant égale à deux, cette série est entièrement marquée sur la courbe choisie par les autres courbes A. Par conséquent, en vertu

---

[1]) CASTELNUOVO et ENRIQUES. *Résultats nouveaux dans la théorie des surfaces algébriques.* Note V du *traité des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* de M.M. E. PICARD et J. SIMART, tome II, 1906, pp. 506.

d'un théorème de M.M. Enriques et Picard [1]), la surface Φ_4 est régulière

3. Dénotons par $|C|$ le système des sections planes de Φ_4 et considérons avec M. Severi le système linéaire

$$|D| = |C + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4|.$$

Les courbes Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 sont de degré virtuel -2 et par conséquent le degré virtuel du système $|D|$ est égal à douze et son genre virtuel égal à sept.

Le système $|D|$ possède les courbes fondamentales Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 et de plus, il est irréductible, simple et privé de points de base [2]).

D'après le théorème de Riemann-Roch, la dimension de $|D|$ est égale à sept et par conséquent on peut transformer birationnellement Φ_4 en une surface Φ^*_{12} du douzième ordre située dans un espace à sept dimensions et sur laquelle le système $|D^*|$ correspondant à $|D|$ sera découpé par les hyperplans. Les coniques Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 de Φ_4 se transformeront en points doubles coniques de Φ^*_{12}.

4. Le second modèle projectif est situé sur une hyperquadrique d'un espace linéaire à cinq dimensions, ou, si l'on veut, il se présente sous forme d'une congruence de droites de notre espace usuel.

Reprenons l'énoncé du théorème I: Le troisième côté du triangle déformable décrit une congruence de rayons birationnellement équivalente à la surface Φ_4 (ou Φ^*_{12}). Désignons par Ψ cette congruence. On peut ajouter qu'une correspondance birationnelle établie entre Φ_4 et Ψ ne possède aucun point fondamental, car l'existence d'une courbe exceptionnelle n'est pas possible sur Φ_4, [redacted] De même, la congruence Ψ ne peut contenir de surfaces réglées exceptionnelles.

Les droites de la congruence Ψ qui s'appuient sur deux rayons correspondants des faisceaux (O_1), (O_2) déterminent sur

---

1) Une démonstration géométrique du théorème invoqué se trouve dans le Mémoire de M. Severi: *Sulla regolarità del sistema aggiunto ad un sistema lineare de curve appartenente ad una superficie algebrica.* Rend. della R. Acc. dei Lincei, 1908, (5) XVII, p.p. 465—470.

2) Severi, loc. cit. (2). § 1.

ceux-ci une correspondance (2 2); on en conclut que la congruence est engendrée par un faisceau linéaire (dépourvu de droite de base) de surfaces elliptiques du quatrième ordre.

Pour déterminer l'ordre de la congruence Ψ, nous nous servirons du principe de correspondance de M. ZEUTHEN pour les variétés rationnelles ∞^2. Deux droites passant par un point O quelconque de l'espace seront correspondantes lorsque le point de rencontre de l'une avec le plan π_1 et le point de rencontre de l'autre avec le plan π_2 détermineront une droite de la congruence. On s'assure aisément que la correspondance a les indices deux et que si une droite décrit un faisceau-plan, la droite correspondante décrira une réglée du huitième ordre. On en conclut que l'ordre de la congruence est égal à douze.

Recherchons maintenant la classe de la congruence, c'est-à-dire le nombre de ses droites se trouvant dans un plan générique. Soit π un plan quelconque de l'espace. Les quadriques engendrées par les droites qui s'appuient respectivement sur les droites a_{11}, a_{12}, $(\pi_1 \pi)$ et sur les droites a_{21}, a_{22}, $(\pi_2 \pi)$ rencontrent la surface Φ_4 en huit points en dehors des droites a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}; à chacun de ces points correspond une droite de la congruence Ψ appartenant au plan π, donc la classe cherchée est égale à huit.

Théorème II. — *Si un triangle se déforme de telle manière que deux de ses côtés s'appuient sur deux couples de droites fixes, les sommets opposés appartenant à des rayons homologues de deux faisceaux homographiques, le troisième côté décrira une congruence d'ordre douze et de classe huit.*

La congruence Ψ a vingt droites en commun avec une congruence bilinéaire, on en conclut que la surface appartenant à l'hyperquadrique d'un espace linéaire à cinq dimensions et qui est l'image de Φ_4, est une surface Ψ_{20} du vingtième ordre.