Extrait du *Bulletin Scientifique* de l'Association des Elèves des Ecoles Spéciales, 12e année, no 1.

SUR UN PARADOXE HYDRODYNAMIQUE

Par Lucien GODEAUX

Dans cette note, je me propose de décrire une expérience imaginée par M. E. Bernardi (*) et de reproduire l'explication théorique que celui-ci en a donnée. L'expérience de M. Bernardi a été reprise récemment par M. G. Van der Mensbrugghe. (**)

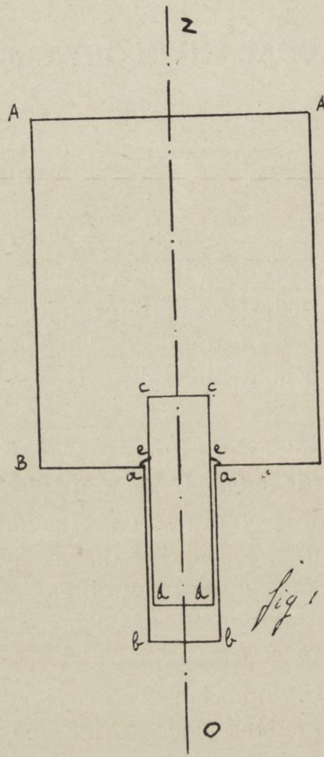
1. Soit (fig. 1) un vase cylindrique ABAB d'axe OZ, et un tube de laiton *abab* de même axe qui vient s'adapter à une ouverture circulaire pratiquée dans le fond du vase ABAB. Un tube de laiton *cdcd* glisse sans frottement dans le tube *abab*. Un index fixé au tube mobile l'empêche de tomber, mais cet index ne bouche pas l'intervalle compris entre les deux tubes *abab* et *cdcd*.

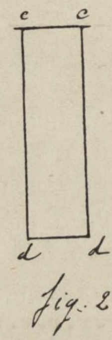
Fermons l'orifice *bb* et remplissons l'appareil d'un liquide quelconque. Lorsque l'on débouche l'orifice *bb*, le liquide s'échappe et le tube mobile *cdcd* est rejeté avec une certaine violence vers le haut. Si l'on maintient le niveau du liquide dans le vase ABAB constant, le tube mobile reste suspendu dans le liquide pendant toute la durée de l'expérience.

(*) *Un paradosso idrodinamico* Atti del R. Istituto Veneto di sc., let. darti. 1903-1904, t. LXIII, pp. 1111-1120.

(**) *Sur les nombreux effets de l'élasticité des liquides*. Bull. de l'Acad. Royale de Belgique 1909 (classe des sciences), pp. 714-726.

2. Pour expliquer théoriquement ce phénomène, M. Bernardi suppose le niveau du liquide constant et applique alors un théorème auquel il était arrivé antérieurement (*). D'après ce théorème, l'effet de la force qui sollicite l'appareil est égal à l'effet qui serait produit par le poids de l'ensemble





ABAB, *abab*, par le poids des corps solide et liquide contenus dans cet ensemble, et par une force $F = mv$, dirigée de bas en haut, m désignant la masse de liquide qui passe en *bb* pendant l'unité de temps, v la vitesse moyenne d'une molécule de liquide.

Soient Q le poids de l'ensemble ABAB, *abab* ; q celui de *cdcd*, P celui du liquide contenu dans l'appareil en dehors

---

(*) *Sopra un curioso problema d'idrodinamica pratica.* Atti. del. R. Instituto Veneto, 1888, (6), VI.

du tube mobile, et p celui du liquide contenu dans ce tube. L'effet de la force appliquée à l'appareil sera donc égal à l'effet des poids Q, q, P, p et de la force F. Représentons cet effet par

$$(Q, q, P, p, F).$$

Soit V la force qui sollicite la partie fixe de l'appareil, (V) son effet ; C la force qui sollicite le tube *cdcd*, (C) son effet ; on a

$$(V, C) = (Q, q, P, p, F),$$

d'où

$$(C) = (Q, q, P, p, F, -V). \qquad (1)$$

3. La force V est évidemment un effet égal à celui du poids Q de l'ensemble ABAB, *abab* et de la pression du liquide sur les parois du vase. Soit R cette pression, (R) son effet. Pour évaluer (R), supposons pour un instant que le tube *cdcd* est supprimé et imaginons en *dd* une lamelle rigide circulaire de diamètre égal au diamètre extérieur du tube mobile. Si σ désigne le poids d'un volume de liquide égal au volume des parois du tube *cdcd*, l'effet de la pression qui agit sur l'appareil ainsi transformé est égal à l'effet produit par les poids P, p, σ, c'est-à-dire que cet effet est (P, p, σ). Mais cet effet est le même que celui de la force R et de la pression τ supportée par la petite lame, donc

$$(R, \tau) = (P, p, \sigma).$$

Comme on a

$$(V) = (Q, R),$$

$$(V) = (Q, P, p, \sigma, -\tau).$$

Substituant dans la formule (1), il vient

$$(C) = (Q, q, P, p, F, -Q, -P, -p, -\sigma, \tau)$$

ou

$$(C) = (q, F, -\sigma, \tau). \qquad (2)$$

4. Dans la formule (2), passons des effets aux forces. A cause de la symétrie de l'appareil, celles-ci seront portées sur OZ, positivement lorsqu'elles seront dirigées de haut

en bas, négativement dans le cas contraire. D'après cela q est positif, F négatif, σ positif et τ positif, donc

$$C = q - F - \sigma + \tau.$$

Soit ω_1 l'aire de la petite lame placée tantôt en *dd*, h la distance de cette lame au niveau du liquide, et δ le poids de l'unité de volume de ce liquide. On a $\tau = \delta\omega_1 h$. D'autre part, soit μ un coefficient variant avec la nature du liquide et ω l'aire d'un cercle d'un diamètre égal au diamètre intérieur du tube *cdcd*, des formules connues donnent

$$v = \mu\sqrt{2gh}, \quad m = \frac{\delta}{g}\mu\omega\sqrt{2gh}.$$

De là

$$C = q - \sigma - \delta h(2\mu^2\omega - \omega_1).$$

Pour que l'expérience se vérifie, on doit avoir C négatif, donc

$$\sigma + 2\delta h\mu^2\omega > q + \delta h\omega_1.$$

5. Voici les dimensions de l'appareil utilisé par M. Bernardi:

Vase ABAB	diamètre intérieur	140 mm.
	hauteur	190 mm.
Tube *abab*	diamètre intérieur	16,4 mm.
	longueur	48 mm.
Tube *cdcd*	diamètre intérieur	15,45 mm.
	diamètre extérieur	16,15 mm.
	longueur	50,00 mm.

6. En reprenant l'expérience de M. Bernardi, M. Van der Mensbrugghe a constaté que pour que celle-ci se vérifie le tube mobile *cdcd* doit porter à sa partie supérieure *cc* un petit rebord (fig. 2). M. Bernardi avait du reste fait la même constatation.

Lucien GODEAUX
Doctorat en Mathématiques