Bulletin de la Classe des sciences

Sur les surfaces ayant mêmes quadrilatères de Demoulin (1re communication)

Lucien Godeaux

Résumé

Recherche des couples de surfaces ayant même quadrilatère de Demoulin, c'est-à-dire des surfaces dont les quadriques de Lie en deux points homologues se touchent en quatre points, caractéristiques pour ces deux quadriques. Étude d'un cas particulier.

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Sur les surfaces ayant mêmes quadrilatères de Demoulin,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Recherche des couples de surfaces ayant même quadrilatère de Demoulin, c'est-à-dire des surfaces dont les quadriques de Lie en deux points homologues se touchent en quatre points, caractéristiques pour ces deux quadriques. Étude d'un cas particulier.

On sait que si l'on représente les tangentes asymptotiques d'une surface (x) par les points de l'hyperquadrique de Klein dans un espace à cinq dimensions, on obtient des points U, V qui se correspondent dans une transformation de Laplace. Ils appartiennent à une suite de Laplace ..., U_n, ..., U_1, U, V, V_1, ..., V_n, ... Si cette suite a la période huit, les points U_3, V_3 représentent les tangentes aux asymptotiques d'une surface $(\bar{x})$ et les quadriques de Lie des surfaces (x), $(\bar{x})$ se touchent en quatre points, caractéristiques pour chacune de ces quadriques. Ces quatre points sont les sommets d'une quadrilatère gauche, dont les côtés appartiennent aux deux quadriques, appelé *quadrilatère de Demoulin*. Les surfaces (x), $(\bar{x})$ ont donc même quadrilatère de Demoulin. Nous avions cru pouvoir établir que cette configuration ne pouvait exister [1], cependant, récemment, M. Rozet et un de ses élèves, M. Carton [2], ont pu construire un exemple. Nous avons donc repris nos recherches sur cet objet et dans cette note, nous recherchons certaines conditions auxquelles doit satisfaire la surface (x), puis nous construisons la surface $(\bar{x})$ dans un cas particulier. Dans le cas général, la méthode que nous

---

[1] BULLETIN DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1933, pp. 16-25.

[2] BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ ROY. DES SCIENCES DE LIÈGE, février 1953. Notre Collègue de l'Université de Lille, M. Decuyper, nous signale un exemple de couple de surfaces ayant même quadrilatère de Demoulin rencontré, incidemment, par M. PANTAZI. (C. R. ACAD. DES SCIENCES, 1934, pp. 1668-1670).

avons utilisée paraît conduire à des calculs compliqués et il faudra sans doute trouver un autre moyen d'attaquer le problème.

Nous utilisons les notations de notre exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace réglé* (¹) auquel nous renvoyons le lecteur.

1. Soit (x) une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées du point x satisfont à un système d'équations aux dérivées partielles, complètement intégrable, que l'on peut ramener à la forme (Wilczynski)

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1 x = 0,$$
$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2 x = 0,$$

a, b, c_1, c_2 étant des fonctions de u, v dont les deux premières ne sont pas nulles.

Au point x, nous attachons un tétraèdre mobile dont les sommets sont les points de rencontre de la quadrique de Lie Φ avec les directrices de Wilczynski (tétraèdre de Cartan), c'est-à-dire les points

$$x,\ m = x\,(\log a)^{10} - 2x^{10},\ n = x\,(\log b)^{01} - 2x^{01},$$
$$y = [8ab - (\log a)^{10}(\log b)^{01}]x + 2x^{10}(\log b)^{01} + 2x^{01}(\log a)^{10} - 4x^{11}.$$

Un point de l'espace peut être représenté par

$$z_1 x + z_2 m + z_3 n + z_4 y$$

et z_1, z_2, z_3, z_4 sont les coordonnées locales de ce point.

La quadrique de Lie Φ a pour équation locale

$$z_1 z_4 + z_2 z_3 = 0 \qquad (\Phi)$$

et la quadrique Φ_1,

$$z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2 - \frac{1}{2a}\beta(\log b^2\beta)^{01}(z_1 z_4 + z_2 z_3) = 0, \qquad (\Phi_1)$$

où l'on a posé

$$\alpha = 2\,(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^{\,2} - 4(b^{01} - c_1),$$
$$\beta = 2\,(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^{\,2} + 4(a^{10} - c_2).$$

(¹) *Paris. Act. Scient. et ind.*, Hermann, 1934.

Rappelons que l'on a identiquement

$$2\alpha a^{10} + a\alpha^{10} = 2\beta b^{01} + b\beta^{01}.$$

Les points caractéristiques de la quadrique de Lie Φ sont donnés par

$$z_3^2 + \alpha z_4^2 = 0, \qquad z_2^2 + \beta z_4^2 = 0.$$

Ces points sont le point x (qui compte pour quatre) et les sommets d'un quadrilatère gauche appelé *quadrilatère de Demoulin*.

Si nous posons

$$\xi^2 + \alpha = 0, \qquad \eta^2 + \beta = 0,$$

les arêtes du quadrilatère de Demoulin sont

$$z_1 \pm \xi z_2 = 0, \qquad z_3 \mp \xi z_4 = 0,$$
$$z_1 \pm \eta z_3 = 0, \qquad z_2 \mp \eta z_4 = 0.$$

2. Les points caractéristiques de la quadrique Φ_1 sont donnés par les équations

$$\beta_1(z_1 z_4 + z_2 z_3) + 2a(z_1 z_3 - \alpha z_2 z_4) - 2a\,(\log bh_1)^{01}(z_3^2 + \alpha z_4^2) = 0, \qquad (\Phi_1^{(u)})$$

$$\alpha_1(z_1 z_4 + z_2 z_3) + 2b(z_1 z_2 - \beta z_3 z_4) - 2b\,(\log ak_1)^{10}(z_2^2 + \beta z_4^2) = 0, \qquad (\Phi_1^{(v)})$$

où l'on a posé

$$\alpha_1 = \alpha + (\log ak_1)^{20} + (\log ak_1)^{10}\,(\log a^2 k_1)^{10},$$
$$\beta_1 = \beta + (\log bh_1)^{02} + (\log bh_1)^{01}\,(\log b^2 h_1)^{01}.$$

Nous désignerons ces quadriques respectivement par $\Phi_1^{(u)}$, $\Phi_1^{(v)}$.

Ces points caractéristiques sont au nombre de huit : les quatre sommets du quadrilatère de Demoulin et quatre autres points, sommets d'un second quadrilatère gauche dont les côtés appartiennent à la quadrique Φ_1. Les côtés du quadrilatère de Demoulin appartiennent également à la quadrique Φ_1.

Nous supposerons que les sommets du second quadrilatère coïncident en un point $\bar{x}$. Dans ces conditions, le point $\bar{x}$ engendre une surface $(\bar{x})$ dont Φ_1 est la quadrique de Lie. Il en résulte que les surfaces (x) et $(\bar{x})$ ont même quadrilatère de Demoulin.

3. Observons tout d'abord que la surface $\Phi_1^{(u)}$ passe par les arêtes opposées

$$z_1 + \xi z_2 = 0, \quad z_3 + \xi z_4 = 0 \tag{1}$$

du quadrilatère de Demoulin.

Les quadriques Φ_1 et $\Phi_1^{(u)}$ se touchent en x, par conséquent elles déterminent un faisceau contenant un cône de sommet x. Ce cône doit passer par les arêtes (1) du quadrilatère de Demoulin, qui sont deux droites gauches, donc il dégénère en deux plans passant par x.

Cela étant, considérons le faisceau déterminé par $\Phi_1^{(u)}$, Φ_1,

$$\beta_1(z_1z_4 + z_2z_3) + 2a(z_1z_3 - \alpha z_2z_4) - 2a\,(\log\, bh_1)^{01}(z_3^2 + \alpha z_4^2)$$
$$+ \lambda\left[z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2 - \frac{1}{2a}\beta\,(\log\, b_2\beta)^{01}(z_1z_4 + z_2z_3)\right] = 0.$$

Pour que la quadrique représentée par cette équation soit un cône, λ doit satisfaire à l'équation

$$\begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 2a & \beta_1-\lambda\theta \\ 0 & 2\lambda\alpha & \beta_1-\lambda\theta & 2a\alpha \\ 2a & \beta_1-\lambda\theta & 2[a(\log bh_1)^{01}-\beta\lambda] & 0 \\ \beta_1-\lambda\theta & 2a\alpha & 0 & 2\alpha[a(\log\, bh_1)^{01}-\beta\lambda] \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\theta = \frac{1}{2a}\,\beta\,(\log\, b_2\beta)^{01}.$$

Cette équation s'écrit

$$[(\beta_1 - \lambda\theta)^2 + 4\alpha\{2a\,(\log\, bh_1)^{01}\lambda - \beta\lambda^3\}] - 4a^2\alpha^2 = 0. \tag{3}$$

Il est aisé de vérifier qu'une racine λ de cette équation annule tous les mineurs du premier membre de l'équation (2) et la quadrique correspondante du faisceau est donc bien dégénérée en deux plans.

4. Supposons que l'équation (3) admette une racine λ non nulle. Alors, la droite commune aux deux plans correspondants a pour équations

$$2\lambda z_1 + 2a z_3 + (\beta_1 - \lambda\theta) z_4 = 0,$$
$$2\lambda\alpha z_2 + (\beta_1 - \lambda\theta) z_3 - 2a\alpha z_4 = 0.$$

Cette droite doit passer par le point $\bar{x}$ et s'appuyer sur les droites (1), c'est-à-dire rencontrer Φ_1 en trois points ; elle doit donc appartenir à cette quadrique. La condition pour qu'il en soit ainsi se traduit par

$$(\beta_1 - \lambda\theta)^2 - 2\lambda\theta(\beta_1 - \lambda\theta) + 4a(\beta\lambda^2 + a^2) = 0. \qquad (4)$$

En soustrayant les équations (3) et (4) membre à membre, on trouve

$$\lambda[\beta_1\theta - 4a\alpha(\log\ bh_1)^{01}] - (\beta_1^2 + 4a^2\alpha) = 0, \qquad (5)$$

qui donne la valeur de λ.

En substituant cette valeur de λ dans l'une des équations (3) ou (4), on trouve une première condition

$$(\beta_1^2 + 4a^2\alpha)(\theta^2 - 4\alpha\beta) = [\beta_1\theta - 4a\alpha\,(\log bh_1)^{01}]^2. \qquad (\mathrm{I})$$

5. La quadrique considérée dégénère en deux plans dont l'équation peut s'écrire

$$2\lambda z_1 + 2a z_3 + (\beta_1 - \lambda\theta) z_4 + k[2\lambda\alpha z_2 + (\beta_1 - \lambda\theta) z_3 - 2a\alpha z_4] = 0.$$

L'un de ces plans passe par une des droites (1), l'autre par l'autre droite. Supposons que le plan précédent passe par la droite

$$z_1 = \xi z_2, \qquad z_3 = -\xi z_4.$$

On obtient

$$2\lambda\xi(1 - k\xi) = 0$$

et comme λ n'est pas nul par hypothèse, on a $1 - k\xi = 0$.

On trouve de même que le plan passant par l'autre droite est donné par $1 + k\xi = 0$, de sorte que la quadrique est dégénérée en deux plans

$$\pm\xi[2\lambda z_1 + 2a z_3 + (\beta_1 - \lambda\theta) z_4] + 2\lambda\alpha z_1 + (\beta_1 - \lambda\theta) z_3$$
$$- 2a\alpha z_4 = 0.$$

6. Considérons de même une quadrique du faisceau

$$\begin{aligned} \alpha_1(z_1z_4 + z_2z_3) - 2b(z_1z_2 - \beta z_3z_4) - 2b\,(\log ak_1)^{10}(z_2^2 + \beta z_4^2) \\ + \mu[z_1^2 + az_2^2 + \beta z_3^2 + abz_4^2 - \theta(z_1z_4 + z_2z_3)] = 0, \end{aligned}$$

déterminé par $\Phi_1^{(r)}$ et Φ_1, dégénérée en deux plans passant l'un par la droite

$$z_1 = \eta z_3, \qquad z_2 = -\eta z_4,$$

l'autre par la droite

$$z_1 = -\eta z_3, \qquad z_2 = \eta z_4.$$

On a

$$[(\alpha_1 - \mu\theta)^2 + 4\beta \{ 2b\,(\log ak_1)^{10}\mu - a\mu^2 \} + 4b^2\beta]^2 = 0.$$

La condition pour que la droite commune aux deux plans appartienne à Φ_1 donne une condition qui, combinée avec la précédente, donne la valeur de μ par

$$\mu[\alpha_1\theta - 4b\beta\,(\log ak_1)^{10}] - (\alpha_1^2 + 4b^2\beta) = 0.$$

Cela donne la condition

$$(\alpha_1^2 + 4b^2\beta)(\theta^2 - 4a\beta) = [\alpha_1\theta - 4b\beta\,(\log ak_1)^{10}]^2 = 0. \qquad \text{(II)}$$

Si μ n'est pas nul, la quadrique dégénère en deux plans d'équation

$$\pm\,\eta[2\mu z_1 + 2bz_2 + (\alpha_1 - \mu\theta)z_4] + (\alpha_1 - \mu\theta)z_2 + 2\beta\mu z_3 - 2b\beta z_4 = 0.$$

Observons que l'on a

$$\theta = \frac{1}{2a}\beta\,(\log b^2\beta)^{01} = \frac{1}{2b}\alpha\,(\log a^2\alpha)^{10},$$

d'après une identité que nous avons rappelée plus haut.

Le point $\overline{x}$ est commun aux quatre plans

$$\begin{gathered} 2\lambda z_1 + 2az_3 + (\beta_1 - \lambda\theta)z_4 = 0, \quad 2\lambda\alpha z_2 + (\beta_1 - \lambda\theta)z_3 - 2a\alpha z_4 = 0, \\ 2\mu z_1 + 2bz_2 + (\alpha_1 - \mu\theta)z_4 = 0, \quad (\alpha_1 - \mu\theta)z_2 + 2\beta\mu z_3 - 2b\beta z_4 = 0 \end{gathered}$$

qui, en vertu des relations (I), (II), ont certainement un point commun.

7. Nous ne poursuivrons pas pour le moment l'examen du cas où λ et μ ne sont pas nuls ; nous examinerons le cas $\lambda = 0$, $\mu = 0$, c'est-à-dire le cas où les quadriques $\Phi_1^{(u)}$, $\Phi_1^{(v)}$ dégénèrent en deux plans.

Pour que la quadrique $\Phi_1^{(u)}$ dégénère en deux plans, on doit avoir

$$\beta_1^2 + 4a^2\alpha = 0. \tag{I}$$

Ces deux plans passent par la droite

$$2az_3 + \beta_1 z_4 = 0, \quad 2az_1 + \beta_1 z_2 - 4a\,(\log bh_1)^{01} z_3 = 0. \tag{1}$$

Si l'on exprime que cette droite doit appartenir à Φ_1, on trouve

$$2\beta_1\,(\log\, bh_1)^{01} + \beta\,(\log\, b^2\beta)^{01} = 0. \tag{II}$$

La condition pour que la quadrique $\Phi_1^{(v)}$ dégénérée en deux plans est

$$\alpha_1^2 + 4b^2\beta = 0. \tag{III}$$

Ces deux plans passent par la droite

$$2bz_2 + \alpha_1 z_4 = 0, \quad 2bz_1 + \alpha_1 z_3 - 4b\,(\log ak_1)^{10} z_2 = 0. \tag{2}$$

Pour que celle-ci appartienne à la quadrique Φ_1, on doit avoir

$$2\alpha_1\,(\log ak_1)^{10} + \alpha(\log a^2\alpha)^{10} = 0. \tag{IV}$$

Exprimons que les plans (1) et (2) passent par un même point ; nous obtenons

$$b\beta_1\,(\log\, bh_1)^{01} = a\alpha_1\,(\log\, ak_1)^{10}. \tag{V}$$

Cette condition n'est qu'une conséquence des relations (II) et (IV), puisque celles-ci expriment que les droites (1), (2) sont des génératrices de modes différents de la quadrique Φ_1.

Le point $\bar{x}$ est donné par

$$\bar{x} = [4b(\log\, bh_1)^{01} - \alpha_1]\beta_1 x + 2a\alpha_1 m + 2b\beta_1 n - 4aby$$

ou par la formule équivalente en vertu de (V),

$$\bar{x} = [4a\,(\log\, ak_1)^{10} - \beta_1]\alpha_1 x + 2a\alpha_1 m + 2b\beta_1 n - 4aby.$$

Pour achever la question, il faut encore montrer que Φ_1 est bien la quadrique de Lie du point x de la surface $(\bar{x})$. Nous utiliserons à cet effet la représentation hyperspatiale.

8. Désignons par U, V les points de l'hyperquadrique Q de S_5 qui représentent les tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01} au point x à la surface (x). Ces points se correspondent dans une transformation de Laplace, on a

$$U^{10} + 2bV = 0, \quad V^{01} + 2aU = 0.$$

Soit ..., U_1, U, V, V_1, ... la suite de Laplace contenant les points U, V et dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens de u.

Dans le cas de la surface (x) considérée ici, les points U_3, V_3 doivent appartenir à Q. Nous allons voir que, sous les conditions (I), (II), (III), (IV), il en est bien ainsi.

Nous avons la relation

$$2V_3 + 2V_2 \;(\log\; a^3k_1^2k_2)^{10} + 2a_1V_1 + \alpha \;(\log\; a^2\alpha)^{10}V$$
$$+ 4b\beta U + U_1 \;(\log\; bh_1)^{01} + U_2 = 0.$$

Représentons par

$$\Omega(p, q) = 0$$

la polarité par rapport à l'hyperquadrique Q. Nous devons avoir

$$\Omega(V_3, V_3) = 0, \qquad \Omega(V_2, V_3) = 0.$$

On a

$$a_1^{01} = 4ab\;(\log ak_1)^{10} - k_2\;(\log a^3k_1^2k_2)^{10}.$$

En dérivant la relation (III) par rapport à v, on a

$$a_1a_1^{01} + 2b^2\beta\;(\log b^2\beta)^{01} = 0.$$

Comme on a

$$b\beta\;(\log b^2\beta)^{01} = a\alpha\;(\log a^2\alpha)^{10},$$

on en déduit

$$a_1a_1^{01} + 2ab\alpha\;(\log a^2\alpha)^{10}.$$

En utilisant la relation (IV), on a, en tenant compte que a_1 n'est pas nul,

$$a_1^{01} = 4ab\;(\log ak_1)^{10}.$$

Par conséquent, on a

$$(\log a^3 k_1^2 k_2)^{10} = 0.$$

On a

$$\Omega(V_1, V_1) = 2\Delta, \quad \Omega(V_1, V_2) = -2\Delta\,(\log ak_1)^{10},$$
$$\Omega(V, V_2) = -2\Delta,$$

où l'on a posé

$$\Delta = |\, x \; x^{10} \; x^{01} \; x^{11} \,|.$$

De la relation donnant V_3, on tire

$$\Omega(V_3, V_2) = \Delta[2\alpha_1\,(\log ak_1)^{10} + \alpha\,(\log a^2\alpha)^{01}] = 0$$

en vertu de la relation (IV). On a ensuite.

$$\Omega(V_3, V_1) = -2\alpha_1\Delta,$$
$$\Omega(V_3, V) = 0, \qquad \Omega(V_3, U) = -4b\Delta$$

et enfin

$$\Omega(V_3, V_3) + \alpha_1\Omega(V_3, V_1) + 2b\beta\Omega(V_3, U) = 0.$$

Cela donne

$$\Omega(V_3, V_3) = 2\Delta(\alpha_1^2 - 4b^2\beta) = 0$$

en vertu de la relation (III).

On démontre de même que l'on a

$$\Omega(U_3, U_3) = 0, \quad \Omega(U_2, U_3) = 0,$$
$$(\log b_3 k_1^2 h_2)^{01} = 0.$$

9. Pour achever la démonstration, nous allons montrer que le point V_3 représente la droite (2).

Rappelons qu'au point

$$\xi_2 V_2 + \xi_1 v_1 + \xi_0 v + \eta_0 U + \eta_1 U_1 + \eta_2 U_2$$

de Q correspond la droite commune aux plans

$$\eta_2[z_1\,(\log bh_1)^{01} + \beta z_3] - \eta_1 z_1 - 2\eta_0 z_3 + 2\xi_0 z_2$$
$$+ \xi_1 z_1 - \xi_2[z_1\,(\log ak_1)^{10} + \alpha z_2] = 0,$$

$$\eta_2[z_3 (\log bh_1)^{01} - z_1] - \eta_1 z_3 + 2\xi_0 z_4 - \xi_1 z_3 + \xi_2[z_3 (\log ak_1)^{10} - \alpha z_4] = 0,$$

$$\eta_2[z_2 (\log bh_4)^{01} - \beta z_4] - \eta_1 z_2 + 2\eta_0 z_4 - \xi_1 z_2 + \xi_2[z_2 (\log ak_1)^{10} - z_1] = 0,$$

$$\eta_2[z_2 + z_4 (\log bk_1)^{01}] - \eta_1 z_4 + \xi_1 z_4 = \xi_2[z_3 + z_4 (\log ak_1)^{10}] = 0.$$

En utilisant la condition (IV), on peut écrire

$$V_3 + \alpha_1 V_1 - \alpha_1(\log ak_1)^{10} V + 2b[\beta U + U_1 (\log bh_1)^{01} + U_2] = 0.$$

On a donc, pour le point V_3,

$$\xi_2 = 0, \ \xi_1 = \alpha_1, \ \xi_0 = -\alpha_1 (\log ak_1)^{10},$$
$$\eta_0 = 2b\beta, \ \eta_1 = 2b (\log bh_1)^{01}, \ \eta_2 = 2b.$$

La dernière des équations précédentes donne

$$2bz_2 + \alpha_1 z_4 = 0,$$

c'est-à-dire la première des équations (2).

La première des équations précédentes donne

$$\alpha_1 z_1 - 2b\beta z_3 - 2\alpha_1 (\log ak_1)^{10} z_2 = 0.$$

Multiplions les deux membres de cette équation par $2b$, tenons compte de la relation (III) et divisons par α_1 ; il vient

$$2bz_1 + \alpha_1 z_3 - 4b (\log ak_1)^{10} z_2 = 0,$$

c'est-à-dire la seconde des équations (2).

Ainsi, le point V_3 représente la droite (2). On démontrerait de même que le point U_3 représente la droite (1).

De tout ceci résulte que les surfaces (x), $(\bar{x})$ ont même quadrilatère de Demoulin.

Liège, le 20 février 1953.