Bulletin de la Classe des sciences

Sur les surfaces ayant mêmes quadrilatères de Demoulin (2e communication

Lucien Godeaux

Résumé
Détermination de la surface la plus générale qui a mêmes quadrilatères de Demoulin qu’une surface (x) donnée.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Sur les surfaces ayant mêmes quadrilatères de Demoulin,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(Seconde note)

Résumé. Détermination de la surface la plus générale qui a mêmes quadrilatères de Demoulin qu'une surface (x) donnée.

Dans notre première note [1], nous avons considéré deux surfaces particulières ayant mêmes quadrilatères de Demoulin. La méthode que nous avions suivie, dans le cas général, conduit à des calculs compliqués et nous avions dit qu'il convenait d'utiliser une autre méthode. C'est ce que nous avons fait dans cette seconde note et nous avons pu obtenir la solution dans le cas général.

Partant d'une surface (x) rapportée à ses asymptotiques u, v, nous considérons la suite de Laplace de l'espace à cinq dimensions,

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots$$

qui lui est attachée.

S'il existe une surface $(\overline{x})$ ayant mêmes quadrilatères de Demoulin que la surface (x), la suite de Laplace précédente a la période huit ; le point U_4 coïncide avec V_3 et le point U_3 avec V_4. Les points U_3, V_3 appartiennent à l'hyperquadrique Q représentant les droites de l'espace de la surface (x). Nous exprimons ces

[1] BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1953, pp. 243-252.

dernières conditions et nous démontrons qu'elles sont suffisantes. Nous déterminons les coordonnées locales du point $\bar{x}$ par rapport à un tétraèdre attaché au point x de la surface (x) et nous formons l'équation locale du plan tangent à la surface $(\bar{x})$.

Comme dans notre première note, nous utilisons les notations de notre exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace réglé* (1), auquel nous renvoyons le lecteur.

1. Soit (x) une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées d'un de ses points x vérifient le système d'équations aux dérivées partielles totalement intégrable

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1 x = 0,$$
$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2 x = 0.$$

Représentons par

$$U = | x\, x^{10} |, \qquad V = | x\, x^{01} |$$

les tangentes aux asymptotiques u, v sur l'hyperquadrique de Klein Q de S_5. Nous avons

$$U^{10} + 2bV = 0, \; V^{01} + 2aU = 0$$

et les points U, V sont transformés de Laplace l'un de l'autre. Désignons par

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots$$

la suite de Laplace à laquelle ils appartiennent, chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u.

Nous conserverons les notations de notre exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace réglé;* nous poserons cependant, pour simplifier l'écriture,

$$\theta = \frac{\beta}{2a} (\log b^2\beta)^{01} = \frac{\alpha}{2b} (\log a^2\alpha)^{10},$$

$$H = (\log bh_1)^{01}, \quad K = (\log ak_1)^{10},$$

$$H_2 = (\log b^3 h_1^2 h_2)^{01}, \quad K_2 = (\log a^3 k_1^2 k_2)^{10}.$$

(1) Actualités scient., Paris, Hermann, 1934.

Tout point de l'espace S_5 peut être représenté par

$$\eta_2 U_2 + \eta_1 U_1 + \eta_0 U + \xi_0 V + \xi_1 V_1 + \xi_2 V_2.$$

Pour que ce point appartienne à l'hyperquadrique Q, il faut et il suffit que l'on ait ([1])

$$\beta\eta_2^2 + (\eta_1 - \eta_2 H)^2 - 2\eta_0\eta_2 - \alpha\xi_2^2 \\ - (\xi_1 - \xi_2 K)^2 + 2\xi_0\xi_2 = 0. \qquad (1)$$

2. Nous avons établi la relation

$$U_3 + H_2 U_2 + \beta_1 U_1 + a\theta U + 2a(\alpha V + K V_1 + V_2) = 0. \qquad (2)$$

Le point U_1 ne peut appartenir à Q ; nous supposerons que le point U_2 n'appartient pas à cette hyperquadrique, ce qui implique

$$\beta + H^2 \neq 0.$$

Écrivons que le point U_3 appartient à Q ; en appliquant la formule (1) pour

$$\eta_2 = H_2,\ \eta_1 = \beta_1,\ \eta_0 = a\theta,\ \xi_0 = 2a\alpha,\ \xi_1 = 2aK,\ \xi_2 = 2a,$$

on obtient

$$(\beta_1 - HH_2)^2 + H_2(\beta H_2 - 2a\theta) + 4a^2\alpha = 0. \qquad (3)$$

Le point U_3 représente, dans l'espace ordinaire, la droite commune aux quatre plans

$$\left.\begin{array}{c} (\beta_1 - HH_2)z_1 - 2a\alpha z_2 + (2a\theta - \beta H_2)z_3 = 0, \\ H_2 z_1 + (\beta_1 - HH_2)z_3 - 2a\alpha z_4 = 0, \\ 2a z_1 + (\beta_1 - HH_2)z_2 - (2a\theta - \beta_1 H_2)z_4 = 0, \\ H_2 z_2 - 2a z_3 - (\beta_1 - HH_2)z_4 = 0. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Si l'on exprime que trois de ces plans passent par une même droite, on retrouve la condition (3).

([1]) La formule (6) de notre exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace réglé* est erronée ; elle doit être remplacée par la relation (1) ci-dessus. De même, les équations du bas de la page 9 de notre exposé, donnant les équations de la droite g, doivent être remplacées par les relations que nous avons données dans notre *Note sur quelques éléments associés aux points d'une surface* (BULL. DE L'ACAD. ROYALE DE BELGIQUE, 1953, pp. 14-23). Dans la troisième formule, il faut lire $\eta_2 + z_2 H - \dots$ en lieu de $\eta_2 + z_3 H - \dots$.

3. Partons maintenant de la relation

$$V_3 + K_2V_2 + \alpha_1V_1 + b\theta V + 2b(\beta U + HU_1 + U_2) = 0. \qquad (5)$$

Le point V_1 ne peut appartenir à Q et nous supposerons que le point V_2 n'appartient pas non plus à Q, ce qui implique

$$\alpha + K_2 \neq 0.$$

Appliquons la formule (1) pour exprimer que le point V_3 appartient à Q en posant

$$\eta_2 = 2b,\ \eta_1 = 2bH,\ \eta_0 = 2b\beta,\ \xi_0 = b\theta,\ \xi_1 = \alpha_1,\ \xi_2 = K_2.$$

Nous obtenons

$$(\alpha_1 - KK_2)^2 + K_2(\alpha K_2 - 2b\theta) + 4b^2\beta = 0. \qquad (6)$$

Le point V_3 représente la droite commune aux quatre plans

$$\left.\begin{aligned} (\alpha_1 - KK_2)z_1 + (2b\theta - \alpha K_2)z_2 - 2b\beta z_3 &= 0, \\ 2bz_1 + (\alpha_1 - KK_2)z_3 - (2b\theta - \alpha K_2)z_4 &= 0, \\ K_2z_1 + (\alpha_1 - KK_2)z_2 - 2b\beta z_4 &= 0, \\ -2bz_2 + K_2z_3 - (\alpha_1 - KK_2)z_4 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

La formule (6) exprime la condition pour que trois de ces plans passent par une même droite.

4. Les points U_3, V_3 appartiennent à Q et d'autre part sont conjugués par rapport à cette hyperquadrique, par conséquent celle-ci contient la droite U_3V_3. Il en résulte que la droite représentée par les équations (4) et la droite représentées par les équations (7), se rencontrent en un point $\bar{x}$.

Si nous exprimons d'ailleurs que les plans représentés par les deux premières des équations (4) et ceux qui sont représentés par les deux premières des équations (7), ont un point commun, nous trouvons

$$(\beta_1 - HH_2)^2(4b^2\beta - 2b\theta K_2 + \alpha K_2^2) = \\ (\alpha_1 - KK_2)^2(4a^2\alpha - 2a\theta H_2 - \beta H_2^2),$$

conséquence des relations (3) et (6).

Cela étant, le point $\bar{x}$, commun à ces quatre plans, a pour coordonnées locales

$$
\left.
\begin{aligned}
\rho z_1 &= 4aba\beta - (2a\theta - \beta H_2)(2b\theta - \alpha K_2),\\
\rho z_2 &= (2a\theta - \beta H_2)(\alpha_1 - KK_2) + 2b\beta(\beta_1 - HH_2),\\
\rho z_3 &= (2b\theta - \alpha K_2)(\beta_1 - HH_2) + 2a\alpha(\alpha_1 - KK_2),\\
\rho z_4 &= 2b\beta H_2 + 2a\alpha K_2 + (\beta_1 - HH_2)(\alpha_1 - KK_2) - 4ab\theta.
\end{aligned}
\right\} \quad (8)
$$

Rappelons que nous avons attaché au point x le tétraèdre mobile ayant pour sommets le point x, les points m, n où les tangentes xx^{10}, xx^{01}, aux asymptotiques coupent la seconde directrice de Wilczynski et le point y, où la première directrice de Wilczynski rencontre une seconde fois la quadrique de Lie. On a alors

$$\bar{x} = z_1 x + z_2 m + z_3 n + z_4 y.$$

5. Les hyperplans polaires des points V_2, V_3, V_4 passent par le point V_3 et d'autre part ces hyperplans ont en commun le plan $U_2U_3U_4$, donc le point V_3 appartient à ce plan. Pour la même raison, le point U_3 appartient au plan $V_2V_3V_4$.

Le plan $U_2U_3U_4$ est tangent en U_3 à la surface (U_3) et par conséquent à l'hyperquadrique Q ; il coupe donc cette dernière suivant deux droites et l'une de celle-ci doit passer par V_3. Par conséquent, la droite U_3V_3 est tangente en U_3 à la surface (U_3). De même, cette droite est tangente en V_3 à la surface (V_3). La congruence (U_3V_3) engendrée par la droite U_3V_3 a donc comme surfaces focales les surfaces (U_3), (V_3), par conséquent V_3 est le transformé de Laplace de U_3 dans le sens des v et U_3, celui de V_3 dans le sens des u.

La suite de Laplace U_3, U_2, U_1, U, V, V_1, V_2, V_3 a donc la période huit. Par conséquent, les surfaces (x) et $(\bar{x})$ ont mêmes tétraèdres de Demoulin.

6. Le plan tangent à la surface $(\bar{x})$ au point $\bar{x}$ a pour équation locale

$$
\begin{aligned}
(H_2K_2 - 4ab)z_1 &+ [H_2(\alpha_1 - KK_2) - 2b(\beta_1 - HH_2)]z_2\\
&+ [K_2(\beta_1 - HH_2) - 2a(\alpha_1 - KK_2)]z_3\\
+ [4ab\theta - 2a\alpha K_2 &- 2b\beta H_2 - (\alpha_1 - KK_2)(\beta_1 - HH_2)]z_4 = 0.
\end{aligned}
$$

La quadrique Φ_2 se réduit à ce plan compté deux fois, tandis que la quadrique de Lie de la surface $(\bar{x})$ coïncide avec la quadrique Φ_1 relative à la surface (x)

7. Représentons par

$$\Omega(p, q) = 0$$

la polarité par rapport à l'hyperquadrique Q. Reprenons la formule (2) et exprimons que l'on a $\Omega(U'_2, U_3) = 0$, $\Omega(U_3, U_3) = 0$. On obtient les relations

$$(\beta - H^2)H_2 = \beta_1 H + a\theta, \tag{9}$$

$$\beta_1^2 + 4a^2\alpha = (\beta_1 H + a\theta)H_2. \tag{10}$$

La relation (9) se déduit d'ailleurs de la relation (10), car on obtient $\Omega(U'_2, U_3) = 0$ en dérivant $\Omega(U_3, U_3) = 0$ par rapport à u.

En additionnant les relation (9) et (10) membre à membre après avoir multiplié les deux membres de la première par H_2, on retrouve la condition (3).

On peut opérer de même pour retrouver la condition (6).

Liège, le 7 avril 1953.