Bulletin de la Classe des sciences

Sur un faisceau de surfaces desmiques généralisées

Lucien Godeaux

Résumé
Étude d'un faisceau de surfaces d'ordre 4 n contenant trois surfaces dégénérées. Formation du système adjoint à ce faisceau dont les surfaces, pour n > 1, sont irrégulières.

Citer ce document / Cite this document :

Godeaux Lucien. Sur un faisceau de surfaces desmiques généralisées. In: Bulletin de la Classe des sciences, tome 39, 1953. pp. 232-244;

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1953.69866;

https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1953_num_39_1_69866;

Fichier pdf généré le 21/06/2023

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur un faisceau de surfaces desmiques généralisées,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Étude d'un faisceau de surfaces d'ordre $4n$ contenant trois surfaces dégénérées. Formation du système adjoint à ce faisceau dont les surfaces, pour $n > 1$, sont irrégulières.

Dans une note récente (1), nous avons construit un faisceau de surfaces d'ordre $4n$ contenant trois surfaces dégénérées, deux en quatre surfaces d'ordre n, la troisième en les faces du tétraèdre de référence comptées chacune n fois. Pour cette raison, nous avons appelé ces surfaces des surfaces desmiques généralisées. Pour $n = 1$, on retrouve d'ailleurs les surfaces desmiques de G. Humbert. Pour $n = 2$, on obtient un faisceau de surfaces du huitième ordre dont le système adjoint est formé par les surfaces du quatrième ordre circonscrites à un tétraèdre ; ces surfaces ont l'irrégularité deux. Il était à prévoir que pour $n > 2$, la surface générale du faisceau est irrégulière ; c'est ce que nous établissons dans cette note.

La surface générale F du faisceau possède $12n$ tacnodes (singuliers pour $n > 2$) ; chacun de ces tacnodes impose $\frac{1}{2}n(n-1)$ conditions aux surfaces adjointes. Celles-ci, pour $n > 2$, ne passent pas par les sommets du tétraèdre qui, compté n fois, donne une surface dégénérée du faisceau. (Rappelons que les tacnodes

(1) *Une généralisation des surfaces desmiques* (BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROY. DE BELGIQUE, 1952, pp. 892-897).

se distribuent, $2n$ par $2n$, sur les arêtes de ce tétraèdre). Nous supposerons dans cette note, $n > 2$ et nous formons l'équation des surfaces adjointes d'abord par $n = 4$, ensuite pour n quelconque [1] Cela nous permet de déterminer le genre géométrique et le genre arithmétique de F et de prouver ainsi que cette surface est irrégulière.

1. Posons

$$\begin{aligned}\Phi_n = x_1^{4n} + x_2^{4n} + x_3^{4n} + x_4^{4n} - 2(x_1x_2)^{2n} - 2(x_1x_3)^{2n} - 2(x_1x_4)^{2n} \\ - 2(x_2x_3)^{2n} - 2(x_2x_4)^{2n} - 2(x_3x_4)^{2n}\end{aligned}$$

et considérons le faisceau de surfaces, d'ordre $4n(n > 2)$

$$\Phi_n + \lambda(x_1x_2x_3x_4)^n = 0.$$

Ce faisceau contient trois surfaces dégénérées en quatre surfaces d'où le nom de surfaces desmiques généralisées que nous avons donné aux surfaces qui le composent.

Nous avons montré que la surface générale F de ce faisceau possède $12n$ tacnodes, singuliers pour $n > 2$, répartis $2n$ par $2n$ sur les arêtes du tétraèdre de référence. En un de ces tacnodes, la surface possède $n - 1$ droites doubles infiniment voisines successives.

Les surfaces F' adjointes d'ordre $4n - 4$ à F passent simplement par un tacnode et par les $n - 2$ premières droites qui lui sont infiniment voisines successives. Nous commencerons par évaluer le nombre de conditions imposées à une surface ayant, en un des tacnodes, le même comportement que les surfaces adjointes.

2. Soit P un de ces tacnodes situé sur la droite $x_3 = x_4 = 0$. Ses coordonnées sont $x_1 = 1$, $x_2 = \epsilon$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, ϵ étant une racine de l'équation $x^{2n} = 1$.

Considérons une surface Ψ, d'ordre $m > 2n$, dont nous écrirons l'équation sous la forme

[1] Nous avons étudié le cas $n = 3$ dans une note *Sur un faisceau de surfaces algébriques irrégulières* (Bulletin de la Soc. roy. des Sciences de Liège, 1952, pp. 313-319).

$$\begin{aligned} f_m(x_1, x_2) &+ x_3 f^{(0)}_{m-1}(x_1, x_2) + x_4 f^{(1)}_{m-1}(x_1, x_2) \\ &+ x_3^2 f^{(0)}_{m-2}(x_1, x_2) + x_3 x_4 f^{(1)}_{m-2}(x_1, x_2) + x_4^2 f^{(2)}_{m-2}(x_1, x_2) + \dots \\ &+ x_3^{n-2} f^{(0)}_{m-n+2}(x_1, x_2) + \dots + x_4^{n-2} f^{(n-2)}_{m-n+2}(x_1, x_2) + \dots = 0, \end{aligned}$$

où les f sont des formes binaires dont le degré est indiqué par l'indice.

Considérons d'autre part la courbe

$$\rho x_1 = a + t^{n-1}A, \quad \rho x_2 = \epsilon a + t^{n-1}B, \quad \rho x_3 = tC, \quad \rho x_4 = tD, \tag{1}$$

où nous posons

$$\begin{aligned} a &= 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{n-2} t^{n-2}, \\ A &= a_{n-1} + a_n t + a_{n+1} t^2 + \dots, \\ B &= b_{n-1} + b_n t + b_{n+1} t^2 + \dots, \\ C &= c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \dots, \\ D &= d_1 + d_2 t + d_3 t^2 + \dots . \end{aligned}$$

Il est facile de voir que cette courbe passe par le point P, pour $t = 0$ et rencontre les $n - 2$ premières droites de F infiniment voisines successives de P sur la surface F. Pour notre objet, quand on remplace dans l'équation de Ψ les coordonnées courantes par les valeurs (1), on doit pouvoir mettre t^{n-1} en évidence, quels que soient les coefficients a, b, c, d.

Cette substitution donne

$$\begin{aligned} a^m f_m(1, \epsilon) &+ t a^{m-1}[C f^{(0)}_{m-1}(1, \epsilon) + D f^{(1)}_{m-1}(1, \epsilon)] \\ &+ t^2 a^{m-2}[C^2 f^{(0)}_{m-2}(1, \epsilon) + CD f^{(1)}_{m-2}(1, \epsilon) + D^2 f^{(2)}_{m-2}(1, \epsilon)] + \dots \\ &+ t^{n-2} a^{m-n+2}[C^{n-2} f^{(0)}_{m-n+2}(1, \epsilon) + \dots + D^{n-2} f^{(n-2)}_{m-n+2}(1, \epsilon)] \\ &+ t^{n-1}[\dots] = 0. \end{aligned}$$

On doit tout d'abord avoir $f_m(1, \epsilon) = 0$ puis, successivement

$$c_1 f^{(0)}_{m-1}(1, \epsilon) + d_1 f^{(1)}_{m-1}(1, \epsilon) = 0,$$

$$c_1^2 f^{(0)}_{m-2}(1, \epsilon) + c_1 d_1 f^{(1)}_{m-2}(1, \epsilon) + d_1^2 f^{(2)}_{m-2}(1, \epsilon) = 0, \; \dots,$$

$$c_1^{n-2} f^{(0)}_{m-n+2}(1, \epsilon) + \dots + d_1^{n-2} f^{(n-2)}_{m-n+2}(1, \epsilon) = 0.$$

Ces relations doivent avoir lieu quels que soient c_1, d_1 et par conséquent, les coefficients de ces quantités sont nuls. Il en résulte que le passage de la surface Ψ par le point P et par les $n-2$ premières droites infiniment voisines de ce point sur F, impose

$$1+2+3+\ldots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

conditions à cette surface.

Nous pouvons en déduire la valeur du genre arithmétique de la surface F.

Le nombre des surfaces d'ordre $4n-4$ linéairement indépendantes est égal à $\binom{4n-1}{3}$ et par conséquent on a

$$p_a=\frac{1}{3}(4n-1)(4n-3)(2n-1)-6n^2(n-1),$$

c'est-à-dire

$$p_a=\frac{1}{3}(14n^3-30n^2+22n-3).$$

3. Nous allons maintenant supposer $n=4$ et former l'équation des adjointes d'ordre $4n-4=12$ à la surface F.

Observons tout d'abord que si $f(x_1, x_2)$ est un polynôme de degré supérieur à $2n$, homogène, tel que $f(1, \epsilon)$ soit nul quand ϵ est une racine primitive d'ordre $2n$ de l'unité, pour ϵ et pour toutes ses puissances, $f(x_1, x_2)$ est divisible par $x_1^{2n}-x_2^{2n}$.

Posons, pour abréger,

$$\alpha_1=-x_1^8+x_2^8+x_3^8+x_4^3, \quad \alpha_2=x_1^8-x_2^8+x_3^8+x_4^8,$$
$$\alpha_3=x_1^8+x_2^8-x_3^8+x_4^8, \quad \alpha_4=x_1^8+x_2^8+x_3^8-x_4^8.$$

L'équation d'une surface d'ordre 12 passant par les 48 tacnodes de la surface F, peut s'écrire sous la forme

$$\left.\begin{array}{c}
a_1x_1^4\alpha_1+a_2x_2^4\alpha_2+a_3x_3^4\alpha_3+a_4x_4^4\alpha_4 \\
+x_1x_2(x_1^8-x_2^8)\varphi_{12}+x_1x_3(x_1^8-x_3^8)\varphi_{13}+x_1x_4(x_1^8-x_4^8)\varphi_{14} \\
+x_2x_3(x_2^8-x_3^8)\varphi_{23}+x_2x_4(x_2^4-x_4^4)\varphi_{24}+x_3x_4(x_3^8-x_4^8)\varphi_{34} \\
+x_2x_3x_4\varphi_{234}+x_3x_4x_1\varphi_{341}+x_4x_1x_2\varphi_{412}+x_1x_2x_3\varphi_{123} \\
+x_1x_2x_3x_4\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)=0,
\end{array}\right\} \qquad (2)$$

où $\quad\varphi_{ik}$ est une forme de degré deux en x_i, x_k ;

φ_{ikl} une forme de degré neuf en x_i, x_k, x_l ;

φ une forme de degré huit en x_1, x_2, x_3, x_4.

Une première condition pour que la surface précédente soit adjointe à F est qu'elle passe par la première droite infiniment voisine de chacun des tacnodes. Pour cela, il faut que le coefficient de x_i ne contenant que x_k, x_l, soit divisible par $x_k^8 - x_l^8$.

Dans l'équation (1), le coefficient de x_1 ne dépendant que de x_2, x_3 est

$$-x_2^{11}\varphi_{12}(0, 1) - x_3^{11}\varphi_{13}(0, 1) + x_2x_3\varphi_{123}(0, x_2, x_3) ;$$

il doit être divisible par $x_2^8 - x_3^8$. On en conclut que l'on a

$$\varphi_{123}(0, x_2, x_3) = (x_2^8 - x_3^8)(A_2x_2 + A_3x_3) + x_2^2x_3^7\varphi_{12}(0, 1)$$
$$+ x_2^7x_3^2\varphi_{13}(0, 1).$$

On trouve de même

$$\varphi_{123}(x_1, 0, x_3) = (x_1^8 - x_3^8)(A_1x_1 + A_3x_3) + x_1^2x_3^7\varphi_{12}(1, 0)$$
$$+ x_1^7x_3^2\varphi_{23}(0, 1),$$

$$\varphi_{123}(x_1, x_2, 0) = (x_1^3 - x_2^8)(A_1x_1 - A_2x_2) + x_1^2x_2^7\varphi_{13}(1, 0)$$
$$- x_1^7x_2^2\varphi_{23}(1, 0).$$

Parmi les termes de $\varphi_{123}(x_1, x_2, x_3)$ ne contenant que deux variables se trouvent les termes

$$A_1x_1(x_1^8 - x_2^8 - x_3^8), \qquad A_2x_2(-x_1^8 + x_2^8 - x_3^8),$$
$$+ A_3x_3(-x_1^8 - x_2^8 + x_3^8).$$

Les autres termes de $\varphi_{123}(x_1, x_2, x_3)$ ne contenant que deux variables sont

$$x_2^2x_3^7\varphi_{12}(0, 1), \qquad x_2^7x_3^2\varphi_{13}(0, 1), \ldots, \qquad - x_1^7x_2^2\varphi_{23}(1, 0).$$

Nous pouvons donc écrire

$$x_1x_2x_3\varphi_{123} = x_1^2x_2^2x_3^2\overline{\varphi}_{123} - A_1x_1^2x_2x_3\alpha_1 - A_2x_1x_2^2x_3\alpha_2 + A_3x_1x_2x_3^2\alpha_3$$
$$+ x_1x_2x_3[x_2^2x_3^7\varphi_{12}(0, 1) + \ldots - x_1^7x_2^2\varphi_{23}(1, 0)]$$
$$+ x_1x_2x_3x_4^8(A_1x_1 + A_2x_2 - A_3x_3).$$

On pourra d'ailleurs faire rentrer le dernier terme dans le terme $x_1x_2x_3x_4\varphi$ de l'équation (2).

En poursuivant les calculs précédents, on obtiendra de même l'expression des termes de φ_{234}, φ_{341}, φ_{412} ne contenant que deux variables. Tous calculs faits, on trouve que le coefficient de $\varphi_{12}(1, 0)$ par exemple, dans l'équation (2), est $x_1^3x_2\alpha_1$, et ainsi de suite. L'équation de la surface F′ pourra par conséquent s'écrire

$$\left.\begin{aligned}
& x_1^2[x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4) \\
& \qquad\qquad + a'_{11}x_3x_4 + a'_{12}x_4x_2 + a'_{13}x_2x_3]\alpha_1 \\
& + x_2^2[x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4) \\
& \qquad\qquad + a'_{21}x_3x_4 + a'_{22}x_4x_1 + a'_{23}x_1x_3]\alpha_2 \\
& + x_3^2[x_3(a_{31}x_1 + \ldots + a_{34}x_4) + a'_{31}x_2x_4 + \ldots + a'_{33}x_1x_2]\alpha_3 \\
& + x_4^2[x_4(a_{41}x_1 + \ldots + a_{44}x_4) + a'_{41}x_2x_3 + \ldots + a'_{43}x_1x_2]\alpha_4 \\
& + b_{12}x_1^2x_2^2(x_1^8 - x_2^8) + b_{13}x_1^2x_3^2(x_1^8 - x_3^8) + b_{14}x_1^2x_4^2(x_1^8 - x_4^8) \\
& + b_{23}x_2^2x_3^2(x_2^8 - x_3^8) + b_{24}x_2^2x_4^2(x_2^8 - x_4^8) + b_{34}x_3^2x_4^2(x_3^8 - x_4^8) \\
& + (x_2x_3x_4)^2\varphi_{234} + (x_3x_4x_1)^2\varphi_{341} + (x_4x_1x_2)^2\varphi_{412} + (x_1x_2x_3)\varphi_{123} \\
& + x_1x_2x_3x_4\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

où φ_{ikl} est cette fois une forme de degré six en x_i, x_k, x_l et φ une forme de degré huit en x_1, x_2, x_3, x_4.

4. L'équation (3) représente une surface passant par les 48 tacnodes de la surface F et par la droite infiniment voisine de chacun de ces points. Pour exprimer que la surface (3) passe par la seconde droite infiniment voisine de chacun de ces points, c'est-à-dire est adjointe à la surface F, nous devons écrire que le coefficient de x_1^2 ne contenant que x_2, x_3 est divisible par $x_2^8 - x_3^8, \ldots$, que le coefficient de x_1x_2 est divisible par $x_3^8 - x_4^8, \ldots$.

Le coefficient de x_1^2 ne contenant que x_2, x_3 est

$$a'_{13}x_2x_3(x_2^8 + x_3^8) - b_{12}x_2^{10} - b_{13}x_3^{10} + (x_2x_3)^2\varphi_{123}(0, x_2, x_3).$$

Dire que ce coefficient est divisible par $x_2^8 - x_3^8$ revient à dire que l'équation

$$2a'_{13}\,x^9 - b_{12} - b_{13}x^{10} + x^2\varphi_{123}(0,\ 1,\ x) = 0$$

admet comme racines une racine primitive de $x^8 = 1$ et ses différentes puissances. On en conclut $a'_{13} = 0$, ensuite que

$$\varphi_{123}(0, x_2, x_3) = b_{12}x_2^6 + b_{13}x_3^6.$$

On établira de la même manière que tous les coefficients a_{ik} sont nuls.

En considérant le coefficient de x_2^2 ne contenant que x_1, x_3 et le coefficient de x_3^2 ne contenant que x_1, x_2, on trouve

$$\varphi_{123}(x_1, 0, x_3) = -b_{12}x_1^6 + b_{23}x_3^6,$$
$$\varphi_{123}(x_1, x_2, 0) = -b_{13}x_1^6 - b_{23}x_2^6.$$

On doit donc avoir

$$b_{12} = b_{13}, \quad b_{12} = -b_{23}, \quad b_{13} = b_{23},$$

ce qui entraîne

$$b_{12} = b_{13} = b_{23} = 0.$$

On établit de même que

$$b_{14} = b_{24} = b_{34} = 0.$$

Le coefficient de x_1x_2 provient du dernier terme de l'équation (3) et est

$$x_3x_4\varphi(0, 0, x_3, x_4).$$

Il doit être divisible par $x_3^8 - x_4^8$, ce qui implique que $\varphi(0, 0, x_3, x_4)$ ne possède que les termes en x_3^8 et x_4^8. On établit de même que les termes de $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ qui ne contiennent que deux variables sont

$$A_1x_1^8 + A_2x_2^8 + A_3x_3^8 + A_4x_4^8.$$

On vient de voir que l'on doit avoir $A_3 + A_4 = 0$. Pour la même raison, on doit avoir

$$A_1 + A_2 = 0, \; A_1 + A_3 = 0, \; \ldots, \; A_2 + A_4 = 0,$$

ce qui n'est possible que si $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0$.

Il en résulte que les termes de φ contiennent au moins trois variables. On peut donc écrire

$$\varphi = x_2x_3x_4\psi_{234} + x_3x_4x_1\psi_{341} + x_4x_1x_2\psi_{412} + x_1x_2x_3\psi_{123} + x_1x_2x_3x_4\bar{\varphi},$$

où ψ_{ikl} est une forme de degré cinq en x_i, x_k, x_l et φ une forme de degré quatre en x_1, x_2, x_3, x_4.

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire l'équation des adjointes d'ordre douze à la surface F, en observant que, d'après ce qui précède, on a

$$\varphi_{ikl} = x_i x_k x_l \bar{\varphi}_{ikl},$$

$\bar{\varphi}_{ikl}$ étant une forme cubique en x_i, x_k, x_l.

En modifiant nos notations, nous pourrons écrire, pour l'équation des adjointes,

$$\left.\begin{aligned} & x_1^3\alpha_1\varphi_1 + x_2^3\alpha_2\varphi_2 + x_3^3\alpha_3\varphi_3 + x_4^3\alpha_4\varphi_4 \\ & + (x_2x_3x_4)^3\varphi_{234} + (x_3x_4x_1)^3\varphi_{341} + (x_4x_1x_2)^3\varphi_{412} + (x_1x_2x_3)^3\varphi_{123} \\ & + x_1(x_2x_3x_4)^2\psi_{234} + x_2(x_3x_4x_1)^2\psi_{341} + x_3(x_4x_1x_2)^2\psi_{412} \\ & + x_4(x_1x_2x_3)^2\psi_{123} + (x_1x_2x_3x_4)^2\varphi = 0, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

où φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 sont des formes linéaires en x_1, x_2, x_3, x_4 ;
φ_{ikl} une forme cubique en x_i, x_k, x_l ;
ψ_{ikl} une forme du cinquième degré en x_i, x_k, x_l ;
φ une forme du quatrième degré en x_1, x_2, x_3, x_4.

5. Le nombre de termes de l'équation précédente est

$$4 \times 4 + 4 \times 10 + 4 \times 21 + 35 = 175.$$

donc le genre géométrique de la surface F, dans le cas $n = 4$, est $p_g = 175$.

D'autre part, d'après la formule établie plus haut, le genre arithmétique de la surface F est $p_a = 167$.

La surface F a donc l'irrégularité $p_g - p_a = 8$.

6. Nous allons maintenant former l'équation des adjointes d'ordre $4n - 4$ à la surface F lorsque n est quelconque ($n > 2$).

Comme nous l'avons déjà observé, une courbe tracée sur la surface F et passant par un tacnode P de cette surface doit rencontrer une adjointe en $n - 1$ points confondus en P.

Posons

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= -x_1^{2n} + x_2^{2n} + x_3^{2n} + x_4^{2n},\\
\alpha_2 &= x_1^{2n} - x_2^{2n} + x_3^{2n} + x_4^{2n},\\
\alpha_3 &= x_1^{2n} + x_2^{2n} - x_3^{2n} + x_4^{2n},\\
\alpha_4 &= x_1^{2n} + x_2^{2n} + x_3^{2n} - x_4^{2n}
\end{aligned}
$$

et observons que la surface $\alpha_1 = 0$, par exemple, passe par les $6n$ tacnodes de la surface F situés sur les droites $x_3 = x_4 = 0$, $x_4 = x_2 = 0$, $x_2 = x_3 = 0$ et par les $n - 1$ droites de F infiniment voisines successives de chacun de ces points. Mais cette surface ne passe pas par les $6n$ autres tacnodes de F. Il suffira d'adjoindre à la surface $\alpha_1 = 0$ une surface d'ordre $2n - 4$ passant par les $6n$ tacnodes de F situés dans le plan $x_1 = 0$ et par les $n - 2$ premières droites infiniment voisines successives à chacun d'eux.

Commençons par rechercher dans quelles conditions la surface

$$x_1^k \varphi_{2n-k-4}(x_2,\ x_3,\ x_4) = 0$$

satisfait aux conditions précédentes, φ_{2n-k-4} étant un polynome de degré $2n - k - 4$ en x_2, x_3, x_4. Le cône φ_{2n-k-4} doit passer par les $6n$ tacnodes de F situés dans le plan $x_1 = 0$ et par conséquent φ_{2n-k-4} doit être divisible par $x_3^{2n} - x_4^{2n}$, $x_4^{2n} - x_2^{2n}$, $x_2^{2n} - x_3^{2n}$, ce qui est impossible. Il faut donc que dans φ_{2n-k-4}, on puisse mettre $x_2x_3x_4$ en facteur.

Si P est un des tacnodes considérés, une courbe γ passant par P et tracée sur F doit rencontrer le cône $\varphi_{2n-k-4} = 0$ en $n - 1 - k$ points confondus en P. Cela implique, comme on le voit facilement, que l'on peut mettre $(x_2x_3x_4)^{n-k-1}$ en facteur dans φ_{2n-k-4}.

Cela étant, la surface

$$x_1^k(x_2x_3x_4)^{n-k-1}\ \varphi_{2k-n-1}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = 0,$$

où φ_{2k-n-1} est cette fois une forme de degré $2k - n - 1$ en x_1, x_2, x_3, x_4, jointe à la surface $\alpha_1 = 0$, est certainement une adjointe à F.

On doit évidemment avoir

$$2k - n - 1 \geqslant 0,$$

d'où $k \geqslant \frac{1}{2}(n + 1)$.

Supposons en premier lieu n pair et posons $n = 2\nu$. On a $k \geqslant \nu + 1$ et le coefficient de α_1 dans l'adjointe à F peut s'écrire

$$x_1^{\nu+1}[(x_2x_3x_4)^{\nu-2}\varphi_1 + x_1(x_2x_3x_4)^{\nu-3}\varphi_3 + \ldots + x_1^{k-\nu-1}(x_2x_3x_4)^{n-k-1} \\ \varphi_{2k-n-1} + \ldots + x_1^{\nu-2}\varphi_{n-3}],$$

où les φ sont des formes en x_1, x_2, x_3, x_4 dont le degré est indiqué par l'indice.

Nous désignerons la quantité entre crochets par A_1, de sorte que l'équation

$$x_1^{\nu+1}A_1\alpha_1 = 0$$

représente une adjointe à F lorsque $n = 2\nu$.

Observons que le polynôme A_1 contient

$$\frac{1}{3}\nu^2(\nu^2 - 1) = \frac{1}{48}n^2(n^2 - 4),$$

termes.

Supposons maintenant n impair et posons $n = 2\nu + 1$. On a $k \geqslant \nu + 1$ et le coefficient de α_1 s'écrit cette fois

$$x_1^{\nu+1}[(x_2x_3x_4)^{\nu-1}\varphi_0 + (x_2x_3x_4)^{\nu-2}\varphi_2 + \ldots + x^{k-\nu-1}(x_2x_3x_4)^{n-k-1} \\ \varphi_{2k-n-1} + \ldots + x_1^{\nu-1}\varphi_{n-3}],$$

où les φ sont encore des formes en x_1, x_2, x_3, x_4 dont le degré est indiqué par l'indice.

Nous représenterons encore par A_1 la quantité entre crochets ; elle contient cette fois

$$\frac{1}{6}\nu(\nu + 1)(2\nu^2 + 2\nu - 1) = \frac{1}{48}(n^2 - 1)(n^2 - 3)$$

coefficients.

On obtient trois autres surfaces adjointes par permutation tournante.

7. Appelons O_1, O_2, O_3, O_4 les sommets du tétraèdre de référence opposés aux plans $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ et r_{ik} la droite O_iO_k.

La surface $(x_2x_3x_4)^{n-1}=0$ passe $2n-2$ fois par les droites r_{12}, r_{13}, r_{14} et $n-1$ fois par les droites r_{34}, r_{42}, r_{23}. Par conséquent, la surface

$$(x_2x_3x_4)^{n-1}\varphi(x_2,x_3,x_4)=0,$$

où φ est une forme de degré $n-1$, est une adjointe à F. On obtient trois autres adjointes analogues.

La surface $x_1(x_2x_3x_4)^{n-2}$ passe $2n-4$ fois par les droites r_{12}, r_{13}, r_{14} et $n-1$ fois par les droites r_{34}, r_{42}, r_{23}, par conséquent la surface

$$x_1(x_2x_3x_4)^{n-2}\varphi(x_2, x_3, x_4)=0,$$

où φ est une forme de degré n, est une adjointe à F.

Plus généralement, considérons la surface

$$x_1^i(x_2x_3x_4)^{n-i-1}\varphi(x_2, x_3, x_4)=0, \tag{5}$$

où φ est maintenant une forme de degré $n+2i-1$. Pour que ce soit une adjointe à F, il faut qu'elle passe $n-1$ fois au moins par les arêtes du tétraèdre $O_1O_2O_3O_4$. On doit donc avoir

$$2n-2i-2 \geq n-1,$$

d'où $i \leq \frac{1}{2}(n-1)$.

Supposons $n=2\nu$. On a $i=\nu-1$. En mettant en indice le degré des formes φ, on obtient les termes

$$\left.\begin{array}{l}(x_2x_3x_4)^{n-1}\varphi_{n-1}(x_2, x_3, x_4)+x_1(x_2x_3x_4)^{n-2}\varphi_{n+1}+\dots \\ \qquad +x_1^{\nu-1}(x_2x_3x_4)^{\nu}\varphi_{2n-3}.\end{array}\right\} \tag{6}$$

Nous désignerons par B_1 cette expression qui, égalée à zéro, représente une adjointe à la surface F. Le polynome B_1 contient

$$\frac{1}{24}n(14n^2-9n-2).$$

Supposons $n=2\nu+1$. On a $i \leq \nu$. Nous prendrons cependant $i=\nu-1$, car pour $i=\nu$, on a $n-i-1=\nu$ et un terme en $(x_1x_2x_3x_4)^{\nu}$. On obtient le même terme que dans le premier cas, c'est-à-dire B_1, mais cette fois, le nombre des coefficients est

$$\frac{1}{24}(n-1)(14n^2-19n+3).$$

Il nous reste à examiner les surfaces du type

$$(x_1x_2x_3x_4)^k\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

où φ est une forme de degré $4n - 4k - 4$. Pour que cette surface soit adjointe, il faut qu'elle passe au moins $n - 1$ fois par chacune des arêtes du tétraèdre de référence, c'est-à-dire que l'on ait

$$2k \geqslant n - 1.$$

On peut d'ailleurs se limiter à la valeur minimum de k, car pour les autres valeurs de k, on retrouve des termes qui figurent déjà dans le polynome φ correspondant précisément à la valeur minimum de k.

Pour $n = 2\nu$, on a $k = \nu$ et pour $n = 2\nu + 1$, on a également $k = \nu$. On obtient donc la surface adjointe

$$(x_1x_2x_3x_4)^\nu\varphi = 0,$$

φ étant de degré $4n - 4\nu - 4$.

8. De ce qui précède, on conclut que l'équation d'une adjointe à F, d'ordre $4n - 4$, s'écrit

$$\left.\begin{aligned} &x_1^{\nu-1}A_1\alpha_1 + x_2^{\nu-1}A_2\alpha_2 + x_3^{\nu-1}A_3\alpha_3 + x_4^{\nu-1}A_4\alpha_4 \\ &+ B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + (x_1x_2x_3x_4)^\nu\varphi = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Supposons $n = 2\nu$. Le nombre de coefficients figurant dans l'équation précédente est

$$\frac{1}{12}n^2(n^2 - 4) + \frac{1}{6}n(14n^2 - 9n - 2) + \frac{1}{3}(n - 1)(2n - 1)(2n - 3)$$

$$= \frac{1}{12}(n^4 + 44n^3 - 70n^2 + 40n - 12).$$

La surface F est donc, si n est pair, de genre géométrique

$$p_g = \frac{1}{12}(n^4 + 44n^3 - 70n^2 + 40n - 12).$$

Nous avons vu que l'on a

$$p_a = \frac{1}{3}(14n^3 - 30n^2 + 22n - 3).$$

L'irrégularité de la surface est donc

$$p_g - p_a = \frac{n}{12}(n^3 - 12n^2 + 50n - 48).$$

Supposons maintenant $n = 2\nu + 1$. Le nombre des coefficients figurant dans l'équation (7) est actuellement

$$\frac{1}{12}(n^2 - 1)(n^2 - 3) + \frac{1}{6}(n - 1)(14n^2 - 19n + 3)$$

$$+ \frac{1}{3}n(2n - 1)(2n + 1) = \frac{1}{12}(n^4 + 44n^3 - 70n^2 + 40n - 3).$$

La surface F a donc, si n est impair, le genre géométrique

$$p_g = \frac{1}{12}(n^4 + 44n^3 - 70n^2 + 40n - 3)$$

et par conséquent l'irrégularité.

$$p_g - p_a = \frac{1}{12}(n^4 - 12n^3 + 50n^2 - 48n + 9).$$

Rappelons que nous avons supposé $n > 2$.

Liège, le 13 février 1953.