Bulletin de la Classe des sciences

Sur la théorie des congruences W

Lucien Godeaux

Résumé

On établit les formules relatives aux quatre suites de Laplace associées dans l'espace S5 à une congruence W. On détermine la condition nécessaire et suffisante pour qu'une congruence W appartienne à un complexe linéaire.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Sur la théorie des congruences W,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — On établit les formules relatives aux quatre suites de Laplace associées dans l'espace S_5 à une congruence W. On détermine la condition nécessaire et suffisante pour qu'une congruence W appartienne à un complexe linéaire.

Une congruence W est, comme on sait, une congruence de droites telle que les asymptotiques se correspondent sur les surfaces focales. Soit (j) une congruence W et soient (x), $(\bar{x})$ ses surfaces focales. A cette congruence, nous attachons dans l'espace S_5 quatre suites de Laplace (1) :

La suite

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots$$

qui contient les points U, V, images dans S_5, sur l'hyperquadrique de Klein, des tangentes aux asymptotiques u, v de la surface (x) ;

La suite analogue

$$\ldots, \bar{U}_n, \ldots, \bar{U}_1, \bar{U}, \bar{V}, \bar{V}_1, \ldots, \bar{V}_n, \ldots$$

relative à la surface $(\bar{x})$;

La suite

$$\ldots, J_n, \ldots, J_1, J, J_{-1}, \ldots, J_{-n}, \ldots$$

déterminée par le point J image de la droite j génératrice de (j) ;

(1) *La théorie des surfaces et l'espace réglé*. Actualités scient. N° 138 (Paris, Hermann, 1934) ; *Sur quatre suites de Laplace associées à une congruence* W Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1951, pp. 880-885).

La suite

$$\ldots,\ P_{-n},\ \ldots,\ P_{-1},\ P,\ P_1,\ \ldots,\ P_n,\ \ldots$$

contenant le point P, seconde image du complexe linéaire osculateur à la congruence (j) le long de la droite (j).

Le but de cette note est d'établir, en vue d'applications ultérieures, les formules relatives à ces quatre suites de Laplace. Des relations établies, nous déduisons la condition nécessaire et suffisante pour que la congruence W appartienne à un complexe linéaire.

Nous utiliserons les mêmes notations que dans notre exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace réglé* [1]. Rappelons-les rapidement.

Nous posons

$$h_n = -(\log bh_1 \ldots, h_{n-1})^{11} + h_{n-1},$$
$$k_n = -(\log ak_1 \ldots, k_{n-1})^{11} + k_{n-1},$$

en convenant d'écrire

$$\varphi^{ik} = \frac{\partial^{i+k}\varphi}{\partial u^i \partial v^k}.$$

On a alors

$$U_n^{01} = U_{n+1} + U_n (\log bh_1 \ldots h_n)^{01}, \quad U_n^{10} = h_n U_{n-1},$$
$$V_n^{10} = V_{n+1} + V_n (\log ak_1 \ldots k_n)^{10}, \quad V_n^{01} = k_n V_{n-1}.$$

Nous posons ensuite

$$\mu_n = \mu_{n-1}^{01} - \mu_{n-1} (\log bh_1 \ldots h_{n-1})^{01}, \quad \mu_n^{10} = h_n \mu_{n-1},$$
$$\lambda_n = \lambda_{n-1}^{10} - \lambda_{n-1} (\log ak_1 \ldots k_{n-1})^{10}, \quad \lambda_n^{01} = k_n \lambda_{n-1}.$$

et

$$J_n = \mu_{n-1} U_n - \mu_n U_{n-1}, \quad J_{-n} = \lambda_{n-1} V_n - \lambda_n V_{n-1}.$$

Rappelons encore que la troisième suite est inscrite dans les deux premières et que la quatrième est circonscrite à ces deux premières, le point J appartenant aux droites UV, $\bar{U}\bar{V}$ et le point P étant l'intersection des droites $U\bar{U}$ et $V\bar{V}$.

[1] Paris, Hermann, 1934.

1. Soit (j) une congruence W dont nous supposerons les surfaces focales (x), $(\overline{x})$ rapportées à leurs asymptotiques u, v.

Les coordonnées normales de Wilczynski du point x de la surface (x) satisfont au système d'équations aux dérivées partielles complètement intégrable

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1 x = 0,$$
$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2 x = 0.$$

Le point $\overline{x}$ de la surface $(\overline{x})$ est donné par

$$\overline{x} = (\lambda_1 - \mu_1)x + \lambda m - \mu n, \tag{1}$$

où x, m, n, y sont les sommets du tétraèdre mobile de Cartan attaché au point x de la surface (x) et où λ, μ sont des fonctions de u, v satisfaisant (Demoulin) aux équations

$$\lambda^{01} + 2a\mu = 0, \qquad \mu^{10} + 2b\lambda = 0.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} 2\overline{x}^{10} - \overline{x}(\log a)^{10} = [2\lambda_2 + 2\lambda_1(\log ak_1)^{10} + \lambda a]x \\ + (\lambda_1 + \mu_1)m - \mu y, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} 2\overline{x}^{01} - \overline{x}(\log b)^{01} = -[2\mu_2 + 2\mu_1(\log bh_1)^{01} + \mu\beta]x \\ - (\lambda_1 + \mu_1)n + \lambda y \end{aligned} \tag{3}$$

et par conséquent

$$2(\lambda\overline{x}^{10} + \mu\overline{x}^{01}) - (\lambda^{10} + \mu^{01})\overline{x} = \psi x, \tag{4}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} \psi = \lambda[2\lambda_2 + 2\lambda_1(\log ak_1)^{10} + \lambda a] - \lambda_1^2 \\ - \mu[2\mu_2 + 2\mu_1(\log bh_1)^{01} + \mu\beta] + \mu_1^2. \end{aligned}$$

On a ensuite

$$2\overline{x}^{20} - 4b\overline{x}^{01} + 2(2b^{01} + c_1)\overline{x} = \xi x,$$
$$2\overline{x}^{02} - 4a\overline{x}^{10} + 2(2a^{10} + c_2)\overline{x} = -\eta x,$$

où l'on a posé

$$\xi = 2\lambda_3 + 2\lambda_2(\log a^3k_1^2k_2)^{10} + 2\lambda_1\alpha_1 + \alpha\lambda(\log a^2\alpha)^{10}$$
$$+ 4b[\beta\mu + \mu_1(\log bh_1)^{01} + \mu_2],$$

$$\eta = 2\mu_3 + 2\mu_2(\log b^3h_1^2h_2)^{01} + 2\mu_1\beta_1 + \beta\mu(\log h^2\beta)^{01}$$
$$+ 4a[\alpha\lambda + \lambda_1(\log ak_1)^{10} + \lambda_2].$$

Rappelons que nous avons établi que l'on a

$$\xi^{01} = 2b\eta, \qquad \eta^{10} = 2a\xi,$$

et, de plus,

$$\psi^{10} = \lambda\xi, \qquad \psi^{01} = -\mu\eta.$$

2. Les coordonnées du point $\bar{x}$ satisfont au système d'équations aux dérivées partielles

$$\begin{vmatrix} 2\bar{x}^{20} - 4b\bar{x}^{01} + 2(2b^{01} + c_1)\bar{x} & \xi \\ 2(\lambda\bar{x}^{10} + \mu\bar{x}^{01}) - (\lambda^{10} + \mu^{01})\bar{x} & \psi \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2\bar{x}^{02} - 4a\bar{x}^{10} + 2(2a^{10} + x_2)\bar{x} & -\eta \\ 2(\lambda\bar{x}^{10} + \mu\bar{x}^{01}) - (\lambda^{10} + \mu^{01})\bar{x} & \psi \end{vmatrix} = 0.$$

On sait que l'on peut faire disparaître le terme en $\bar{x}^{10}$ de la première équation et le terme en $\bar{x}^{01}$ de la seconde en multipliant les coordonnées du point $\bar{x}$ par un facteur convenable (Wilczynski).

Remplaçons donc, dans les deux équations précédentes, $\bar{x}$ par $\rho\bar{x}$.

Le coefficient de $\bar{x}^{10}$ dans la première équation est

$$4\psi\rho^{10} - 2\rho\lambda\xi = 2\psi\rho\left(\log\frac{\rho^2}{\psi}\right)^{10}.$$

Dans la seconde, le coefficient de $\bar{x}^{01}$ est

$$4\psi\rho^{01} + 2\rho\mu\eta = 2\psi\rho\left(\log\frac{\rho^2}{\psi}\right)^{01}.$$

Si donc nous posons $\rho = \sqrt{\psi}$, les équations précédentes satisfont à la condition imposée et nous pouvons les écrire sous la forme

$$(\rho\overline{x})^{20} + 2\overline{b}(\rho\overline{x})^{01} + \overline{c}_1\rho\overline{x} = 0,$$
$$(\rho\overline{x})^{02} + 2\overline{a}(\rho\overline{x})^{10} + \overline{c}_2\rho\overline{x} = 0.$$

Dans ces équations, on a

$$2\overline{b} = -2b - \frac{\mu}{\lambda}(\log\psi)^{10}, \quad 2\overline{a} = -2a - \frac{\lambda}{\mu}(\log\psi)^{01};$$

$\overline{c}_1$, $\overline{c}_2$ sont des fonctions de ρ, λ, μ, a, b, c_1, c_2 qu'il est inutile d'écrire.

Observons que l'on peut écrire

$$2\overline{b} = \frac{\mu^{10}}{\lambda} - \frac{\mu}{\lambda}(\log\psi)^{10} = \frac{\mu}{\lambda}\left(\log\frac{\mu}{\psi}\right)^{10},$$
$$2\overline{a} = \frac{\lambda^{01}}{\mu} - \frac{\lambda}{\mu}(\log\psi)^{01} = \frac{\lambda}{\mu}\left(\log\frac{\psi}{\mu}\right)^{01}.$$

3. Représentons les droites de l'espace par les points d'une hyperquadrique $\underset{\sim}{Q}$ de l'espace S_5 à cinq dimensions. Les points qui représentent les tangentes xx^{10}, xx^{01} aux asymptotiques de la surface (x) sont donnés par

$$U = |x \;\; x^{10}|, \qquad V = |x \;\; x^{01}|$$

et l'on a

$$U^{10} + 2bV = 0, \qquad V^{01} + 2aU = 0.$$

La droite j qui engendre la congruence W est représentée par

$$J = \lambda U - \mu V.$$

Les tangentes $\overline{x}\overline{x}^{10}$, $\overline{x}\overline{x}^{01}$ aux asymptotiques de la surface $(\overline{x})$ sont représentées par les points

$$\overline{U} = |\rho\overline{x} \;\; (\rho\overline{x})^{10}| = \psi|\overline{x} \;\; \overline{x}^{10}|, \qquad \overline{V} = \psi|\overline{x} \;\; \overline{x}^{01}|$$

et on a

$$\overline{U}^{10} + \frac{\mu}{\lambda}\left(\log\frac{\mu}{\psi}\right)^{10}\overline{V} = 0, \quad \overline{V}^{01} + \frac{\lambda}{\mu}\left(\log\frac{\lambda}{\psi}\right)^{01}\overline{U} = 0.$$

De l'équation (1), on déduit

$$|x\ \bar{x}| = \lambda|x\ m| - \mu|x\ n|,$$

d'où

$$|x\ \rho\bar{x}| = -2\rho \mathrm{J}.$$

4. Nous allons maintenant rechercher les expressions de $\bar{\mathrm{U}}$, $\bar{\mathrm{V}}$ en fonction des points U_2, U_1, U, V, V_1, V_2.

De la relation (2), on déduit

$$\begin{aligned} 2|\bar{x}\ \bar{x}^{10}| = [2\lambda_2 + 2\lambda_1\ (\log\ ak_1]^{10} + \lambda a]|\bar{x}\ x| \\ + (\lambda_1 + \mu_1)|\bar{x}\ m| - \mu|\bar{x}\ y|. \end{aligned}$$

On a

$$|\bar{x}\ x| = 2\mathrm{J} = 2(\lambda\mathrm{U} - \mu\mathrm{V}).$$

D'autre part, de la relation (1), on déduit

$$\begin{aligned} |\bar{x}\ m| &= (\lambda_1 - \mu_1)\,|x\ m| - \mu|x\ n|, \\ |\bar{x}\ y| &= (\lambda_1 - \mu_1)\,|x\ y| + |m\ y| - \mu|n\ y|. \end{aligned}$$

En utilisant les formules données dans notre exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace réglé*, p. 8, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\bar{\mathrm{U}} = {} & [2\lambda\lambda_2 + 2\lambda\lambda_1\ (\log\ ak_1)^{10} + \lambda^2 a - \lambda_1^2 + \mu_1^2 + \mu^2\beta]\mathrm{U} \\ & - 2\mu[\lambda_2 + \lambda_1(\log\ ak_1)^{10} + \lambda a]\mathrm{V} - 2\mu[\mu_1 - \mu(\log\ bh_1)^{01}]\mathrm{U}_1 \\ & + 2\mu[\lambda_1 - \lambda\ (\log\ ak_1)^{10}]\mathrm{V}_1 + 2\mu^2\mathrm{U}_2 - 2\lambda\mu\mathrm{V}_2, \\ \frac{1}{\rho}\bar{\mathrm{V}} = {} & -2\lambda[\mu_2 + \mu_1\ (\log\ bh_1)^{01} + \beta\mu]\mathrm{U} \\ & + [2\mu\mu_2 + 2\mu\mu_1\ (\log\ bh_1)^{01} + \beta\mu^2 + \lambda_1^2 - \mu_1^2 + \lambda^2 a]\mathrm{V} \\ & + 2\lambda[\mu_1 - \mu\ (\log\ bh_1)^{01}]\mathrm{U}_1 - 2\lambda[\lambda_1 - \lambda\ (\log\ ak_1)^{10}]\mathrm{V}_1 \\ & - 2\lambda\mu\mathrm{U}_2 + 2\lambda^2\mathrm{V}_2. \end{aligned}$$

De ces relations, on déduit

$$\frac{1}{\rho}\,(\lambda\bar{\mathrm{U}} + \mu\bar{\mathrm{V}}) = \psi(\lambda\mathrm{U} - \mu\mathrm{V}) = \psi\mathrm{J}.$$

5. Le point P, pôle de l'hyperplan $\mathrm{J}_2\mathrm{J}_1\mathrm{J}\mathrm{J}_{-1}\mathrm{J}_{-2}$ par rapport à Q, est l'intersection des droites $U\overline{U}$ et $V\overline{V}$. Des deux expressions trouvées pour $\overline{U}$, on déduit

$$\lambda\overline{U} + \mu\overline{V} = \rho\psi(\lambda U - \mu V),$$

d'où

$$\lambda(\rho\psi U - \overline{U}) = \mu(\rho\psi V + \overline{V}).$$

Formons l'expression

$$\begin{aligned}\psi U - \frac{\overline{U}}{\rho} = & -2\mu[\mu_2 + \mu_1 (\log bh_1)^{01} + \beta\mu]U \\ & + 2\mu[\lambda_2 + \lambda_1 \ (\log \ ak_1)^{10} + \alpha\lambda]V \\ & + 2\mu[\mu_1 - \mu \ (\log \ bh_1)^{01}]U_1 - 2\mu[\lambda_1 - \lambda \ (\log ak_1)^{10}]V_1 \\ & \qquad - 2\mu^2 U_2 + 2\lambda\mu V_2.\end{aligned}$$

Nous prendrons pour P l'expression

$$-2\lambda\mu\rho P = \lambda(\rho\psi U - U),$$

d'où

$$\begin{aligned}P = & [\mu_2 + \mu_1 (\log bh_1)^{01} + \beta\mu]U - [\lambda_2 + \lambda_1 (\log ak_1)^{10} + \alpha\lambda)V \\ & - [\mu_1 - \mu (\log bh_1)^{01}]U_1 + [\lambda_1 - \lambda (\log ak_1)^{10}]V_1 + \mu U_2 - \lambda V_2.\end{aligned}$$

Si nous désignons par $\Omega(p, q) = 0$ l'équation de la polarité par rapport à l'hyperquadrique Q, on doit avoir

$$\Omega(P, J_2) = 0, \ \Omega(P, J_1) = 0, \ldots, \ \Omega(P_1 J_{-2}) = 0.$$

On a

$$J_2 = \mu_1 U_2 - \mu_2 U_1, \ J_1 = \mu U_1 - \mu_1 U_1 \ldots$$

et on vérifie que les relations précédentes sont bien satisfaites.

De l'expression de P, on déduit

$$2P^{10} + \xi V = 0, \quad 2P^{01} - \eta U = 0$$

et par conséquent

$$P^{11} = a\xi U - b\eta V,$$

ou encore

$$P^{11} - 2a\frac{\xi}{\eta} P^{01} - 2b\frac{\eta}{\xi} P^{1}{}_{0} = 0,$$

équation de Laplace à laquelle satisfait le point P.

On peut encore écrire

$$P^{11} - (\log \eta)^{10} P^{01} - (\log \xi)^{01} P^{10} = 0.$$

Dans le calcul de P^{10}, P^{01}, nous avions utilisé les formules

$$\begin{gathered}2V_3 + 2V_2(\log a^3 k_1^2 k_2)^{10} + 2\alpha_1 V_1 + \alpha(\log a^2\alpha)^{10} V \\ + 4b[\beta U + U_1(\log b h_1)^{01} + U_2] = 0,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}2U_3 + 2U_2(\log b^3 h_1^2 h_2)^{01} + 2\beta_1 U_1 + \beta(\log b^2\beta)^{01} U \\ + 4a[\alpha V + V_1(\log a k_1)^{10} + V_2] = 0.\end{gathered}$$

On remarquera que si, dans les premiers membres des relations précédentes, on remplace V_3, V_2, V_1, V, U, U_1, U_2, U_3 respectivement par λ_3, λ_2, λ_1, λ, μ, μ_1, μ_2, μ_3, on obtient les expressions ξ et η.

6. Le point P_1, pôle de l'hyperplan $J_3 J_2 J_1 J J_{-1}$ est le transformé de Laplace de P dans le sens des u. Nous poserons

$$\xi P_1 = P^{10} - P(\log \eta)^{10}.$$

On en déduit

$$\eta^2 P_1^{01} = 2a\eta_1 P,$$

en posant

$$\eta_1 = \eta^{01} - \eta(\log a)^{01}.$$

De même, l'hyperplan $J_1 J J_{-1} J_{-2} J_{-3}$ a pour pôle par rapport à Q le point P_{-1}, transformé de Laplace de P dans le sens des v. Nous poserons

$$\eta P_{-1} = P^{01} - P(\log \xi)^{01}.$$

On en déduit

$$\xi^2 P_{-1}^{10} = 2b\xi_1 P,$$

moyennant

$$\xi_1 = \xi^{10} - \xi(\log b)^{10}.$$

Le point P_1 satisfait à l'équation de Laplace

$$P_1^{11} - P_1^{10} (\log \eta\eta_1)^{10} - \xi\eta_1 P_1 = 0$$

et le point P_{-1}, à l'équation

$$P_{-1}^{11} - P_{-1}^{01} (\log \xi\xi_1)^{01} - \xi_1\eta P_{-1} = 0.$$

Le point P_2, pôle par rapport à Q de l'hyperplan $J_4 \ldots J$ est donc donné par

$$P_1^{01} - P_1 (\log \eta\eta_1)^{10}$$

et le point P_{-2}, pôle de l'hyperplan $J \ldots J_{-4}$ par

$$P_{-1}^{10} - P_{-1} (\log \xi\xi_1)^{01}.$$

Et ainsi de suite.

On observera que l'on a

$$\xi_1^{01} = h_1 \xi, \qquad \eta_1^{10} = k_1 \eta.$$

7. Le point $\overline{U}_1$, transformé de Laplace de $\overline{U}$ dans le sens des v, est donné par

$$\overline{U}_1 = \overline{U}^{01} - \overline{U}_1 (\log \bar{b})^{01},$$

mais il est plus facile d'obtenir l'expression de $\overline{U}_1$ en remarquant que ce point est l'intersection des droites $\overline{U}J$ et U_1P_{-1} dans le plan UU_1P.

Écrivons l'expression d'un point de ce plan sous la forme

$$\zeta_1 U + \zeta_2 U_s + \zeta_3 P\,;$$

appelons ζ_1, ζ_2, ζ_3 les coordonnées locales du point considéré.

Remarquons d'autre part que l'on a

$$\frac{\overline{U}}{\rho} = \psi U + 2\mu P, \qquad J_1 = \mu U_1 - \mu_1 U,$$
$$2\eta P_{-1} = \eta U - 2P (\log \xi)^{01},$$

d'où

$$2\xi P_{-1} = \xi U - 4bP.$$

Cela étant, la droite $\overline{U}J_1$ a pour équation locale

$$2\mu\zeta_1 + 2\mu_1\zeta_2 - \psi\zeta_3 = 0$$

et la droite U_1P_{-1},

$$2b\zeta_1 + \xi\zeta_3 = 0.$$

On est conduit à poser

$$\overline{U}_1 = \xi(\mu U_1 - \mu_1 U) + 2b(\psi U_1 + 2\mu_1 P).$$

On a de même

$$\overline{V}_1 = \eta(\lambda V_1 - \lambda_1 V) - 2a(\psi V_1 + 2\lambda_1 P).$$

Le point $\overline{U}_2$ s'obtiendra de même comme intersection des droites $\overline{U}_1J_2$ et U_2P_{-2} et le point $\overline{V}_2$ comme intersection des droites $\overline{V}_1J_{-2}$ et V_2P_2, et ainsi de suite.

8. Le complexe linéaire osculateur à la congruence (j) le long de la droite j a comme seconde image, dans S_5, le point P. Si la congruence (j) appartient à un complexe linéaire, celui-ci coïncide avec les complexes osculateurs à (j) en toute droite j. En d'autres termes, le point P reste fixe lorsque u, v varient.

Nous avons trouvé

$$2P^{10} + \xi V = 0, \qquad 2P^{01} - \eta U = 0.$$

Si la congruence (j) appartient à un complexe linéaire, on a donc $\xi = 0$, $\eta = 0$. L'une de ces conditions entraîne l'autre. Nous avons montré que si l'une des quantités ξ, η est nulle, l'autre l'est également et la congruence (j) appartient à un complexe linéaire [1]. Par conséquent : *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une congruence* W *appartienne à un complexe linéaire est que l'une des quantités ξ, η et par suite l'autre, soit nulle.*

Liège, le 15 novembre 1954.

(1) *Sur une congruence* W *particulière* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1954, pp. 983-989).