Bulletin de la Classe des sciences

Sur les congruences engendrées par les directrices de Wilczynski d'une surface

Lucien Godeaux

Résumé

Étude des congruences engendrées par les directrices de Wilczynski d'une surface (x) dans l'hypothèse où les plans focaux de la directrice passant par le point x, passent par les foyers de la seconde directrice.

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Sur les congruences engendrées par les directrices de Wilczynski d'une surface,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Étude des congruences engendrées par les directrices de Wilczynski d'une surface (x) dans l'hypothèse où les plans focaux de la directrice passant par le point x, passent par les foyers de la seconde directrice.

Dans une note antérieure [1], nous avons étudié les congruences formées par les directrices de Wilczynski d'une surface ; nous nous proposons de poursuivre cette étude dans un cas particulier. Étant donnée une surface (x), désignons par w_1 la directrice de Wilczynski passant par le point x et par w_2 celle qui se trouve dans le plan tangent à la surface. Nous supposons, dans cette note, que les plans focaux de la droite w_1 passent par les foyers de la droite w_2. Cela peut se présenter dans deux cas : les quadriques de Lie de la surface (x) n'ont que deux points caractéristiques, ou bien les invariants des équations de Laplace auxquelles satisfont les points de l'hyperquadrique de Klein qui représentent les tangentes asymptotiques à la surface (x), sont égaux. Nous avons étudié le premier cas antérieurement et nous considérons le second.

Soient L la suite de Laplace déterminée par les foyers de la droite w_1 et L′ celle qui est déterminée par les foyers de la droite w_2. La suite L′ est inscrite dans la suite L en ce sens que deux points consécutifs de la suite L′ se trouvent dans deux plans

[1] *Sur les congruences formées par les directrices de Wilczynski d'une surface* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1928, pp. 335-345). Voir aussi notre exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace réglé* (ACTUALITÉS SCIENT., n° 138, Paris, Hermann, 1934).

déterminés chacun par trois points consécutifs de la suite L, ces deux groupes de trois points ayant deux points (consécutifs) en commun.

Nous terminons en considérant les deux cas simultanément ; la droite w_1 passe alors par un point fixe et la droite w_2 se trouve dans un plan fixe. Les quadriques de Lie de la surface ont toutes ce point et ce plan fixes comme pôle et plan polaire communs.

1. Soit (x) une surface non réglée, rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées normales de Wilczynski du point x satisfont au système d'équations aux dérivées partielles, complètement intégrable,

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1x = 0,$$
$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2x = 0.$$

Au point x, nous attachons le tétraèdre de Cartan, ayant pour sommets les points

$$x,\ m = x\ (\log a)^{10} - 2x^{10},\ n = x\ (\log b)^{01} - 2x^{01},$$
$$y = [8ab - (\log a)^{10} (\log b)^{01}]x - 2x^{10} (\log b)^{01} - 2x^{01} (\log a)^{10} - 4x^{11}.$$

Tout point de l'espace a pour coordonnées des expressions de la forme

$$z_1x + z_2m + z_3n + z_4y$$

et z_1, z_2, z_3, z_4 seront appelées les coordonnées locales de ce point.

Les directrices de Wilczynski attachées au point x sont les droites

$$w_1 = xy, \qquad w_2 = mn.$$

Soient

$$U = |x \quad x^{10}|, \quad V = |x \quad x^{01}|$$

les points de l'hyperquadrique de Klein de S_5 représentant les tangentes aux asymptotiques de la surface (x) au point x. On a

$$U^{10} + 2bV = 0, \quad V^{01} + 2aU = 0$$

et les points U, V sont consécutifs dans une suite de Laplace. Soient U_1 le transformé de Laplace de U dans le sens des v, V_1

celui de V dans le sens des u. Les points $U_1 + V_1$, $U_1 - V_1$ représentent respectivement les directrices de Wilczynski w_1 et w_2.

L'équation différentielle des développables de la congruence (w_1) est donnée par

$$\begin{aligned}\Omega[(U_1 + V_1)^{10},\ (U_1 + V_1)^{10}]\, du^2 + 2\Omega[(U_1 + V_1)^{10},\ (U_1 + V_1)^{01}] \\ dudv + \Omega[(U_1 + V_1)^{01},\ (U_1 + V_1)^{01}]dv^2 = 0,\end{aligned}$$

où Ω (p, q) est la forme polaire du premier membre de l'hyperquadrique de Klein. Comme nous l'avons établi, cette équation est

$$\alpha du^2 + 2(h_1 - k_1)dudv - \beta dv^2 = 0, \tag{1}$$

où

$$\begin{aligned}\alpha &= 2\ (\log\ a)^{20} + \overline{(\log\ a)^{10}}^{\,2} + 4(b^{01} + c_2),\\ \beta &= 2\ (\log\ b)^{02} + \overline{(\log\ b)^{01}}^{\,2} + 4(a^{10} + c_1),\\ h_1 &= -(\log\ b)^{11} + 4ab,\quad k_1 = -(\log\ a)^{11} + 4ab.\end{aligned}$$

Nous avons montré que l'équation (1) est également l'équation différentielle des développables de la congruence (w_2).

2. Tout point de l'espace S_5 a des coordonnées de la forme

$$\eta_2 U_2 + \eta_1 U_1 + \eta_0 U + \xi_0 V + \xi_1 V_1 + \xi_2 V_2$$

et, pour que ce point appartienne à l'hyperquadrique Q, on doit avoir

$$\begin{aligned}\beta\eta_2^2 + [\eta_1 - \eta_2\ (\log\ bh_1)^{01}]^2 - 2\eta_0\eta_2 \\ - \alpha\xi_2^2 - [\xi_1 - \xi_2\ (\log\ ak_1)^{10}]^2 + 2\xi_0\xi_2 = 0.\end{aligned}$$

La droite de S_3 qui correspond à ce point est commune aux plans

$$\begin{aligned}&\eta_2[z_1\ (\log\ bh_1)^{01} + \beta z_3] - \eta_1 z_1 - 2\eta_0 z_3 \\ &\qquad + 2\xi_0 z_2 + \xi_1 z_1 - \xi_2[z_1\ (\log\ ak_1)^{10} + \alpha z_2] = 0,\\ &\eta_2[z_3\ (\log\ bh_1)^{01} - z_1] - \eta_1 z_3 + 2\xi_0 z_4 - \xi_1 z_3 + \\ &\qquad \xi_2[z_3\ (\log\ ak_1)^{10} - \alpha z_4] = 0,\\ &\eta_2[z_2\ (\log\ bh_1)^{01} - \beta z_4] - \eta_1 z_2 + 2\eta_0 z_4 - \xi_1 z_2 + \\ &\qquad \xi_2[z_2\ (\log\ ak_1)^{10} - z_1] = 0.\\ &\eta_2[z_2 + z_4\ (\log\ bh_1)^{01}] - \eta_1 z_4 + \xi_1 z_4 - \xi_2[z_3 + z_4\ (\log\ a)^{10}] = 0.\end{aligned}$$

Si l'on recherche les droites qui représentent dans S_3 les points

$$(U_1 + V_1)^{10}\,du + (U_1 + V_1)^{01}\,dv,$$
$$(U_1 - V_1)^{10}\,du + (U_1 - V_1)^{01}\,dv,$$

du et dv satisfaisant à l'équation (1). On trouve que :

1° Les foyers de la congruence (w_1) sont donnés par

$$z_1^2 - 2(h_1 + k_1)z_1z_4 + (4h_1k_1 - \alpha\beta)z_4^2 = 0,\ z_2 = 0,\ z_3 = 0 \quad (2)$$

et ses plans focaux par

$$\alpha z_2^2 + 2(h_1 - k_1)z_2z_3 - \beta z_3^2 = 0. \quad (3)$$

2° Les foyers de la congruence (w_2) sont donnés par

$$\alpha z_2^2 - 2(h_1 - k_1)z_2z_3 - \beta z_3^2 = 0,\ z_1 = 0,\ z_4 = 0, \quad (4)$$

et ses plans focaux par

$$z_1^2 + 2(h_1 + k_1)z_1z_4 + (4h_1k_1 - \alpha\beta)z_4^2 = 0. \quad (5)$$

On en déduit immédiatement que les plans focaux d'une des congruences (w_1), (w_2) sont les plans polaires, par rapport à la quadrique de Lie

$$z_1z_4 + z_2z_3 = 0,$$

des foyers de l'autre congruence, théorème dû à M. Decuyper [1].

3. Examinons dans quelles conditions les foyers de la droite w_2 appartiennent aux plans focaux de la droite w_1. Les équations (3) et (4) doivent être identiques, ce qui peut se présenter dans deux cas :

1° $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Nous supposons $h_1 \neq k_1$. On sait que dans ces conditions, les quadriques de Lie de la surface (x) n'ont que deux points caractéristiques. Les développables des congruences (w_1), (w_2) sont données par $u = c^{te}$, $v = c^{te}$. Les foyers de la droite w_1 sont les points

$$p = 2h_1x + y, \quad q = 2k_1x + y,$$

[1] *Sur quelques congruences attachées à une surface* (JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, 1937, p. 89).

et ceux de la droite w_2 sont les points m, n. Nous avons étudié la configuration formée par les deux suites de Laplace déterminées l'une par les points p, q, l'autre par les points m, n. La seconde est doublement inscrite dans la première (¹).

2° $h_1 = k_1$. Nous supposons que α, β ne sont pas nuls.

Les foyers de la droite w_1 sont, en posant

$$\xi^2 + \alpha = 0, \quad \eta^2 + \beta = 0,$$

$$p = (2h_1 + \xi\eta)x + y, \quad q = (2h_1 - \xi\eta)x + y$$

et ceux de la droite w_2,

$$r = \eta m + \xi n, \quad s = \eta m - \xi n.$$

L'équation différentielle (1) des développables des congruences (w_1), (w_2) devient

$$\alpha du^2 - \beta dv^2 = 0,$$

ou

$$(\xi du + \eta dv)(\xi du - \eta dv) = 0.$$

Les points r, s sont conjugués par rapport à la quadrique de Lie, comme cela doit d'ailleurs résulter du théorème de M. Decuyper rappelé plus haut.

4. Nous avons

$$\begin{aligned}
2x^{10} &= x(\log a)^{10} - m,\\
2m^{10} &= \alpha x - m(\log a)^{10} - 4bn,\\
2n^{10} &= -2h_1 x + n(\log a)^{10} + y,\\
2y^{10} &= -4b\beta x + 2h_1 m - \alpha n - y(\log a)^{10},\\
2x^{01} &= x(\log b)^{01} - n,\\
2m^{01} &= -2k_1 x + m(\log b)^{01} + y,\\
2n^{01} &= \beta x - 4am - n(\log b)^{01},\\
2y^{01} &= -4a\alpha x - \beta m + 2k_1 n - y(\log b)^{01}.
\end{aligned}$$

(¹) *Sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie* (BULLETIN DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1928, pp. 158-186, 345-348). Voir aussi *La théorie des surfaces et l'espace réglé* (LOC. CIT.).

On a par conséquent

$$2p^{10} + p(\log a)^{10} = 2\varphi_1 x - \xi s,$$
$$2p^{01} + p(\log b)^{01} = 2\varphi_2 x + \eta s,$$

où nous posons

$$\varphi_1 = (2h_1 + \xi\eta)^{10} + (2h_1 + \xi\eta)(\log a)^{10} - 2b\beta,$$
$$\varphi^2 = (2h_1 + \xi\eta)^{01} + (2h_1 + \xi\eta)(\log b)^{01} - 2a\alpha.$$

On a de même

$$2q^{10} + q(\log a)^{10} = 2\varphi_1 x + \xi r,$$
$$2q^{01} + q(\log b)^{01} = 2\varphi_2 x + \eta r.$$

On en déduit

$$2(\eta p^{10} + \xi p^{01}) + [\eta(\log a)^{10} + \xi(\log b)^{01}]p = 2(\eta\varphi_1 + \xi\varphi_2)x,$$
$$2(\eta q^{10} - \xi p^{01}) + [\eta(\log a)^{10} - \xi(\log b)^{01}]q = 2(\eta\varphi_1 - \xi\varphi_2)x.$$

Comme on a

$$p - q = 2\xi\eta x,$$

on trouve une relation linéaire entre $\eta p^{10} + \xi p^{01}$, p, q d'une part, entre $\eta q^{10} - \xi q^{01}$, q, p d'autre part. On voit donc que q est le transformé de Laplace de p dans le sens $\xi du - \eta dv$ et p celui de q dans le sens $\xi du + \eta dv$.

D'autre part, on a

$$2(\eta p^{10} - \xi p^{01}) + [\eta(\log a)^{10} - \xi(\log b)^{01}]p = 2(\eta\varphi_1 - \xi\varphi_2)x - 2\xi\eta s$$

et

$$2(\eta q^{10} + \xi q^{01}) + [\eta\,(\log a)^{10} + \xi(\log b)^{01}]q = 2(\eta\varphi_1 + \xi\varphi_2)x + 2\xi\eta r.$$

On en conclut que le point p_1, transformé de Laplace de p dans le sens $\xi du + \eta dv$ est tel que la droite pp_1 ne passe pas par s et que, de même, la droite qq_1, où q_1 est le transformé de Laplace de q dans le sens $\xi\, du - \eta dv$, ne passe pas par r.

5. Occupons-nous des points r, s. On a

$$2r^{10} + s(\log a)^{10} = -\xi[(2h_1 + \xi\eta)x - y] + 2\eta^{10}m + (2\xi^{10} - 4b\eta)n,$$
$$2r^{01} - s(\log b)^{01} = -\eta[(2h_1 + \xi\eta)x - y] + (2\eta^{01} - 4a\xi)m + 2\xi^{01}n,$$

et

$$2s^{10} + r(\log a)^{10} = \xi[(2h_1 - \xi\eta)x - y] + 2\eta^{10}m - (2\xi^{10} + 4by)n,$$
$$2s^{01} \quad r(\log b)^{01} = -\eta[(2h_1 - \xi\eta)x - y) + (2\eta^{01} + 4a\xi)m - 2\xi^{01}n.$$

On en déduit

$$2(\eta r^{10} - \xi r^{01}) + [\eta \log a)^{10} + \xi (\log b)^{01}]s = + (2\eta\eta^{10} - 2\xi\eta^{01} + 4a\xi^2)m - (2\xi\xi^{01} - 2\eta\xi^{10} + 4b\eta^2)n,$$

et ensuite

$$2(\eta s^{10} + \xi s^{01}) + [\eta (\log a)^{10}\xi (\log b)^{01}]r = [2\eta\eta^{10} + 2\xi\eta^{01} + 4a\xi^2]m - (2\xi\xi^{01} + 2sq\xi^{10} + 4b\eta^2)n.$$

Comme on a

$$2\eta m = r + s, \quad 2\xi n = r - s,$$

on voit que les points $\eta r^{10} - \xi r^{01}$, r, s sont en ligne droite, de même que les points $\eta s^{10} + \xi s^{01}$, r, s. Il en résulte que s est le transformé de Laplace de r dans le sens $\xi du + \eta dv$ et r, celui de s dans le sens $\xi du - \eta dv$.

Nous avons deux suites de Laplace

$$\ldots, p_i, \ldots, p_1, p, q, q_1, \ldots, q_i, \ldots \tag{L}$$

où p_i est le transformé de p_{i-1} dans le sens $\xi du + \eta dv$ et q_i le transformé de q_{i-1} dans le sens $\xi du - \eta dv$, et

$$\ldots, s_i, \ldots, s_i, s, r, r_1, \ldots, r_i, \ldots \tag{L'}$$

où s_i est le transformé de s_{i-1} dans le sens $\xi du + \eta dv$ et r_i, celui de r_{i-1} dans le sens $\xi du - \eta dv$.

Appelons plans successifs associés à la suite L deux plans déterminés chacun par trois points successifs de la suite, ces deux groupes de trois points ayant deux points communs. Les points s, r appartiennent à deux plans successifs p_1pq, pqq_1 de la suite L. Par conséquent, deux points successifs de la suite L' appartiennent à deux plans successifs de L ([1]). Ainsi, s_i appartient au plan $p_{i+1}p_ip_{i-1}$ et r_i au plan $q_{i+1}q_iq_{i-1}$.

6. Considérons pour terminer le cas où nous avons $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $h_1 = k_1$. L'équation (1) est alors indéterminée. Il en est de même des équations (3) et (4).

L'équation (2) se réduit à

$$(z_1 - 2h_1 z_4)^2 = 0$$

et la droite w_1 passe par le point

$$p = 2h_1 x + y.$$

Ce point est fixe, car on a

$$2p^{10} + p(\log a)^{10} = 0, \qquad 2p^{01} + p(\log b)^{01} = 0.$$

Posons $p = \lambda \bar{p}$ et déterminons λ par les conditions

$$2\lambda^{10} = -\lambda(\log a)^{10}, \qquad 2\lambda^{01} = -\lambda(\log b)^{01},$$

ce qui est possible puisque $(\log a)^{11} = (\log b)^{11}$. On a alors

$$\bar{p}^{10} = 0, \qquad \bar{p}^{01} = 0$$

et les droites w_1 passent par le point fixe p.

L'équation (5) se réduit à

$$(z_1 + 2h_1 z_4)^2 = 0.$$

Le plan $z_1 + 2h_1 z_4 = 0$ est fixe, car on a

$$\begin{aligned}
2z_1^{10} &= -z_1(\log a)^{10} - a z_2 + 2h_1 z_3 + 4b\beta z_4,\\
2z_4^{10} &= -z_3 + z_4(\log a)^{10},\\
2z_1^{01} &= -z_1(\log b)^{01} + 2k_1 z_2 - \beta z_3 + 4a\alpha z_4,\\
2z_4^{01} &= -z_2 + z_4(\log b)^{01}
\end{aligned}$$

([1]) Voir notre note *Remarque sur les suites de Laplace inscrites dans une suite de Laplace* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1954, pp. 87-90).

et par conséquent

$$2(z_1 + 2h_1z_4)^{10} = -(z_1 + 2h_1z_4)(\log a)^{10},$$
$$2(z_1 + 2h_1z_4)^{01} = -(z_1 + 2h_1z_4)(\log b)^{01}.$$

En effet, de $\alpha = 0$, $\beta = 0$, on déduit

$$(\log ak_1)^{10} = 0, \qquad (\log bh_1)^{01} = 0.$$

La droite w_2 se trouve donc dans un plan fixe.

7. Voici une remarque concernant les surfaces précédentes. On a

$$2m^{10} + m(\log a)^{10} = -4bn,$$
$$2n^{01} + n(\log b)^{01} = -4am,$$

donc, dans le plan fixe $z_1 + 2h_1z_4 = 0$, les points m, n sont transformés de Laplace l'un de l'autre.

On a d'autre part

$$2m^{01} - m(\log b)^{01} = p_1,$$
$$2n^{10} - n(\log a)^{10} = p_1,$$

en posant

$$p_1 = -2h_1x + y,$$

point de rencontre du plan $z_1 + 2h_1z_4 = 0$ avec w_1.

On a en outre

$$2p_1^{10} + p_1(\log a)^{10} = 4h_1m,$$
$$2p_1^{01} + p_1(\log b)^{01} = 4h_1n.$$

Les points m, n, p se succèdent donc dans une suite de Laplace de période trois.

8. Appelons ϖ le plan fixe contenant les droites w_2. Le pôle du plan ϖ par rapport à une quadrique de Lie quelconque de la surface (x) est le point p.

On pourrait obtenir une génération de la surface (x) de la manière suivante :

Considérons une famille de quadriques d'équation

$$x_4^2 + \varphi_2(x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{1}$$

les coefficients de φ_2 dépendant de deux paramètres u, v. Le pôle du point O_4 (0, 0, 0, 1) par rapport à ces quadriques est le plan $x_4 = 0$. Il faudrait déterminer les coefficients de φ_2 de telle sorte que la famille (1) n'ait que deux points caractéristiques, alignés sur le point O_4. Pour cela, il faut que les deux cônes

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial v} = 0,$$

de sommet O_4, n'aient qu'une seule droite en commun, les points d'intersection de cette droite avec la quadrique (1) étant les points x, y. Il faut en outre exprimer que les lignes u, v sont les asymptotiques de l'enveloppe.

Liège, le 17 février 1954.