Bulletin de la Classe des sciences

Sur les surfaces algébriques touchant un plan le long d'une droite

Lucien Godeaux

Résumé
Dans cette note, d'un caractère assez élémentaire, nous précisons les singularités d'une surface algébrique aux points d'une de ses droites le long de laquelle elle a un plan tangent fixe.

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE

Sur les surfaces algébriques touchant un plan le long d'une droite,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Dans cette note, d'un caractère assez élémentaire, nous précisons les singularités d'une surface algébrique aux points d'une de ses droites le long de laquelle elle a un plan tangent fixe.

Si une surface algébrique non réglée d'ordre n touche un plan le long d'une droite qui lui appartient, elle possède $n - 1$ points doubles sur cette droite. Ces points doubles peuvent ne pas être distincts et il nous a paru utile de préciser, dans ce cas, la singularité de la surface.

1. Soit F une surface algébrique d'ordre n, non réglée, touchant un plan α le long d'une droite a qui lui appartient.

La polaire par rapport à F d'un point P n'appartenant pas au plan α est une surface d'ordre $n - 1$ rencontrant a en $n - 1$ points A_1, A_2, ...,A_{n-1}, en général distincts. En un de ces points, A_1 par exemple, le plan tangent à F doit être d'une part le plan α, d'autre part le plan aP ; il est donc indéterminé. Il en résulte que le point A_1, et de même les points A_2, A_3, ..., A_{n-1}, sont doubles pour la surface F.

Inversement, supposons que la surface F possède $n - 1$ points doubles coniques A_1, A_2, ..., A_{n-1}, sur une droite a qui lui appartient. Les plans passant par a coupent F suivant des courbes γ d'ordre $n - 1$ passant par les points A_1, A_2, ..., A_{n1-}. Le plan tangent α à F en un point B de a distinct des points précédents coupe F suivant une courbe γ qui doit passer par B, puisque ce point est double pour la section de F par ce plan. Il en résulte que cette courbe γ est formée de la droite a et d'une courbe d'ordre $n - 2$. Mais alors, la section de F par α contient la droite a comptée deux fois et α est donc tangent à F en tout point de a.

Si une surface algébrique d'ordre n *a un plan tangent fixe le long d'une de ses droites* a, *elle possède en général* n — 1 *points doubles coniques sur cette droite. Réciproquement, si la surface* F *possède* n — 1 *points doubles coniques sur une de ses droites, elle admet un plan tangent fixe le long de celle-ci.*

2. Les développements qui précèdent intéressent le cas général, mais il peut arriver que la polaire du point P par rapport à la surface F ait un contact d'ordre $k - 1$ $(k \leqslant n - 1)$ avec la droite a en un point A et coupe encore cette droite en $n - k - 1$ points $A_1, A_2, \ldots, A_{n-k-1}$. Le raisonnement qui précède montre encore que les points $A, A_1, A_2, \ldots, A_{n-k-1}$ sont doubles pour la surface F.

Le plan aP coupe F suivant une courbe γ d'ordre $n - 1$. Par P, on peut mener $(n - 1)(n - 2)$ tangentes à cette courbe et la polaire de P passe par les points de contact. Les autres points de rencontre de cette polaire avec la courbe γ sont nécessairement situés sur la droite a et par conséquent, la courbe γ a un contact d'ordre $k - 1$ avec a en A.

La polaire d'un point P′ quelconque, n'appartenant pas à α, ne peut rencontrer a en dehors des points $A, A_1, A_2, \ldots, A_{n-k-1}$, car un point de rencontre ultérieur serait double pour F et appartiendrait à la surface polaire de P. Il en résulte que les surfaces polaires des différents points de l'espace, n'appartenant pas à α, se comportent sur la droite a comme la polaire de P.

Tous les plans passant par a coupent donc encore F suivant des courbes γ d'ordre $n - 1$ ayant un contact d'ordre $k - 1$ avec a en A et passant par $A_1, A_2, \ldots, A_{n-k-1}$. Par suite, la surface F possède $k - 1$ points doubles infiniment voisins successifs du point A sur la droite a. Si $k > 1$, A est donc double biplanaire pour F. Nous allons vérifier analytiquement cette conclusion.

3. Prenons le point A comme origine et la droite a comme axe Ox. L'équation de la surface F peut s'écrire

$$yz + f_3(x, y, z) + f_4(x, y, z) + \ldots + f_n(x, y, z) = 0, \qquad (1)$$

où $f_i(x, y, z)$ est un polynôme entier, rationnel et homogène, de degré i, en x, y, z.

La surface devant passer par Ox, le terme en x^i manque dans f_i. Nous poserons

$$f_i(x, y, z) = x^{i-1}f_{i,1}(y, z) + x^{i-2}f_{i,2}(y, z) + \dots + f_{i,i}(y, z),$$

où $f_{i,j}(y, z)$ est une forme de degré j en y, z.

La courbe γ, d'ordre $n-1$, section de F par le plan $z = \lambda y$, a pour équation

$$\begin{aligned}\lambda y + x^2 f_{3,1}(1, \lambda) + xy f_{3,2}(1, \lambda) + y^2 f_{3,3}(1, \lambda) + \dots \\ + x^{n-1}f_{n-1,1}(1, \lambda) + \dots + y^{n-1}f_{n-1,n-1}(1, \lambda) = 0.\end{aligned}$$

Lorsque l'on fait $y = 0$ dans cette équation, on doit pouvoir mettre x^k en évidence, ce qui exige que l'on ait

$$f_{3,1} \equiv 0, \quad f_{4,1} \equiv 0, \dots, \quad f_{k,1} \equiv 0.$$

La surface F est donc représentée par l'équation (1) où l'on pose

$$f_i(x, y, z) \equiv x^{i-2} f_{i,2}(y, z) + \dots + f_{i,i}(y, z)$$

pour $i = 3, 4, \dots, k$ et

$$f_i(x, y, z) \equiv x^{i-1}f_{i,1}(y, z) + \dots + f_{i,i}(y, z)$$

pour $i = k+1, k+2, \dots, n$.

Cela étant, effectuons sur F la transformation quadratique

$$x = x', \ y = y'x', \ z = z'x', \tag{T}$$

qui fait correspondre au point infiniment voisin de O sur Ox la nouvelle origine $O'(x' = y' = z' = 0)$.

L'équation de la surface F devient, après division par x'^2 et remplacement pour simplifier de x', y', z' par x, y, z,

$$\begin{aligned}yz + xf_{3,2}(y, z) + f_{3,3}(y, z) + \dots \\ + x^{k-2} f_{k,2}(y, z) + f_{k,3}(y, z) + \dots + f_{k,k}(y, z) \\ + x^{k-1}f_{k+1,1}(y, z) + f_{k+1,2}(y, z) + \dots + f_{k+1,k+1}(y, z) + \dots \\ + x^{n-2} f_{n,1}(y, z) + \dots + f_{n,n}(y, z) = 0.\end{aligned}$$

Cette transformée de F a un point double à l'origine et ce point est double conique si $k = 2$, le cône tangent ayant alors pour équation

$$yz + xf_{3,1}(y, z) = 0.$$

biplanaire si $k > 2$. La surface passe par Ox.

Effectuons sur la surface F la transformation T^m, c'est-à-dire

$$x = x', \quad y = y'x'^m, \quad z = z'x'^m,$$

où $m \leqslant k$. La transformée de F a pour équation, après division par x^{2m},

$$\begin{aligned} yz &+ xf_{3,2}(y, z) + x^m f_{3,3}(y, z) + \dots \\ &+ x^{k-2} f_{k,2}(y, z) + x^{m+k-3} f_{k,3}(y,z) + \dots + x^{m(k-2)}(y, z) \\ &+ x^{k-m} f_{k+1,1}(y, z) + \dots = 0. \end{aligned}$$

Pour $m < k - 1$, la surface obtenue possède un point double biplanaire à l'origine. Pour $m = k - 1$, elle possède au contraire un point double conique, le cône tangent ayant pour équation

$$yz + xf_{k+1,1}(y, z) = 0.$$

Pour $m = k$, la surface possède un point simple à l'origine, le plan tangent étant

$$f_{k+1,1}(y, z) = 0.$$

On voit donc que la surface F possède en A un point double biplanaire auquel sont infiniment voisins successifs, sur la droite a, $k - 1$ points doubles biplanaires sauf le dernier, qui est conique.

4. Retournons à la surface F d'ordre n possédant sur la droite a un point double biplanaire singulier A, auquel sont infiniment voisins successifs $k - 1$ points doubles situés sur a et $n - k - 1$ points doubles coniques $A_1, A_2, \dots, A_{n-k-1}$.

Un plan passant par a coupe encore F suivant une courbe γ d'ordre $n - 1$ ayant un contact d'ordre $k - 1$ avec a en A et passant par les points $A_1, A_2, \dots, A_{n-k-1}$. Par suite, si le plan touche la surface en un point B de a distinct des précédents, la courbe γ doit comprendre comme partie la droite a et le plan en question touche F le long de a.

Nous sommes maintenant en mesure de compléter l'énoncé du n° 1.

Si une surface algébrique d'ordre n, *non réglée, possède un plan tangent fixe le long d'une de ses droites* a, *elle a* n — 1 *points doubles sur cette droite. Un certain nombre de ces points peuvent être infiniment voisins et former une suite de points doubles biplanaires sauf le dernier qui est conique. Réciproquement, si une surface algébrique possède sur une de ses droites* a *des points doubles formant la configuration précédente, elle a un plan tangent fixe le long de cette droite* a.

5. Déterminons en remarquant que le raisonnement précédent peut s'étendre de la manière suivante :

Considérons une surface algébrique F touchant, le long d'une courbe algébrique C, une surface algébrique F'. Supposons que la courbe C soit dépourvue de points singuliers. Alors les points de rencontre de la polaire d'un point P par rapport à F avec C sont doubles pour F et les points de rencontre de C avec la polaire de P par rapport à F' sont doubles pour cette surface. Ces points doubles de F ou de F' peuvent se grouper en des suites de points infiniment voisins successifs situés sur la courbe C, chaque groupe étant formé de points doubles biplanaires, sauf le dernier qui est double conique.

Liège, le 9 décembre 1954.