Bulletin de la Classe des sciences

Sur quatre suites de Laplace associées à une congruence W

Lucien Godeaux

Résumé
A une congruence W, nous avons associé quatre suites de Laplace dans un espace linéaire à cinq dimensions. Nous étudions ici un cas où ces suites ne sont pas illimitées.

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Sur quatre suites de Laplace associées à une congruence W,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — A une congruence W, nous avons associé quatre suites de Laplace dans un espace linéaire à cinq dimensions. Nous étudions ici un cas où ces suites ne sont pas illimitées.

Nous considérons dans cette note une congruence W que nous désignons par (j) et ses deux surfaces focales (x), $(\bar{x})$. Comme nous l'avons montré antérieurement [1], nous associons à (j) quatre suites de Laplace dans l'espace à cinq dimensions S_5 : Une suite L associée à la surface (x) et qui contient les images sur l'hyperquadrique de Klein Q de S_5 des tangentes asymptotiques de la surface ; une suite $\bar{L}$ associée d'une manière analogue à la surface $(\bar{x})$; une suite $\mathcal{J}$ qui contient le point J image sur Q de la droite j ; une suite $\mathcal{P}$ polaire de $\mathcal{J}$ par rapport à Q. La suite $\mathcal{J}$ est inscrite dans les suites L, $\bar{L}$ et la suite $\mathcal{P}$ est circonscrite à ces deux suites.

Nous considérons ici le cas où les suites L, $\bar{L}$ s'arrêtent respectivement aux points U_n, $\bar{U}_{n+1}$ en présentant le cas de Laplace. Alors, ces suites s'arrêtent aux points V_{n+2}, $\bar{V}_{n+3}$ en présentant le cas de Goursat. La suite $\mathcal{J}$ s'arrête au point $J_{n+1} \equiv \bar{U}_{n+1}$ et

---

(1) *Sur quelques familles de quadriques associées aux points d'une surface* (ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE, 1928, pp. 213-226) ; *La théorie des surfaces et l'espace réglé* (ACTUALITÉS SCIENT. ET IND., n° 138 ; Paris Hermann, 1934).

Au sujet des cas où les suites L, $\bar{L}$, $\mathcal{J}$ s'arrêtent, voir notre note *Sur les surfaces associées à une suite de Laplace terminée* (COLLOQUE DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE DU CENTRE BELGE DE RECHERCHES MATHÉMATIQUES TENU A LOUVAIN EN 1951. Liège, Thone et Paris, Masson, 1951). Voir aussi le texte d'une conférence que nous avons faite à l'Université de Turin et qui paraîtra sous le titre *Alcune osservazioni sulle congruenze W* dans les RENDICONTI DU SÉMINAIRE MATHÉMATIQUE DE CETTE UNIVERSITÉ.

au point $J_{-(n+3)} \equiv \overline{V}_{n+2}$. Nous montrons que la suite $\mathcal{P}$ s'arrête au point $P_{-(n+1)} \equiv U_n$ et au point $P_{n+3} \equiv \overline{V}_{n+3}$. Les suites $\mathcal{J}$ et $\mathcal{P}$ présentent donc dans un sens, un arrêt dans le cas de Laplace et, dans l'autre sens, un arrêt dans le cas de Goursat, comme les suites L et $\overline{\text{L}}$.

1. Soient (j) une congruence W, (x) et $(\bar{x})$ ses surfaces focales, u et v les paramètres des asymptotiques de celles-ci.

Désignons par U, V les points de l'hyperquadrique Q de S_5 qui représentent les tangentes aux asymptotiques u, v de la surface (x), par $\overline{U}$, $\overline{V}$ les points de Q qui représentent les tangentes aux asymptotiques u, v de $(\bar{x})$. On sait que les points U, V sont consécutifs dans une suite de Laplace

$$\ldots,\ U_n,\ \ldots,\ U_1,\ U,\ V,\ V_1,\ \ldots,\ V_m\ \ldots \qquad \text{(L)}$$

que nous désignerons par L. Dans cette suite, chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u. De même, $\overline{U}$, $\overline{V}$ sont consécutifs dans une suite de Laplace

$$\ldots,\ \overline{U}_n,\ \ldots,\ \overline{U}_1,\ \overline{U},\ \overline{V},\ \overline{V}_1,\ \ldots,\ \overline{V}_m,\ \ldots \qquad (\overline{\text{L}})$$

qui sera désignée par $\overline{\text{L}}$. Chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

Les droites UV, $\overline{U}\overline{V}$ se coupent en un point J qui représente la droite j sur Q. On sait, d'après un théorème classique de Darboux, que le point J engendre un réseau conjugué aux congruences (UV), $(\overline{U}\overline{V})$. Le point J appartient donc à une suite de Laplace

$$\ldots,\ J_n,\ \ldots,\ J_1,\ J,\ J_{-1},\ \ldots,\ J_{-m},\ \ldots, \qquad (\mathcal{J})$$

que nous désignerons par $\mathcal{J}$, inscrite à la fois dans les suites L et $\overline{\text{L}}$. Dans cette suite, chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u. Le point J_n est l'intersection des droites U_nU_{n-1} et $\overline{U}_n\overline{U}_{n-1}$ et le point J_{-m}, l'intersection des droites V_mV_{m-1} et $\overline{V}_m\overline{V}_{m-1}$.

Considérons les hyperplans déterminés par cinq points consécutifs de la suite $(\mathcal{J})$ et les pôles de ces hyperplans par rapport à Q. Ces points forment une suite qui est également une suite de Laplace, circonscrite aux suites L et $\overline{\text{L}}$.

D'une manière précise, désignons par P le pôle de l'hyperplan $J_2J_1JJ_{-1}J_{-2}$, par P_1 le pôle de $J_3J_2J_1JJ_{-1}$, par P_2 le pôle de $J_4J_3J_2$, J_1, J, par P_i le pôle de l'hyperplan $J_{i+2}J_{i+1}J_iJ_{i-1}J_{i-2}$, par P_{-i} le pôle de l'hyperplan $J_{-i-2}J_{-i-1}J_{-i}J_{-i+1}J_{-i+2}$.

Le point P est l'intersection des droites $U\overline{U}$ et $V\overline{V}$. En effet, les hyperplans polaires $U_1UVV_1V_2$ de U, $\overline{U}_1\overline{U}\overline{V}\overline{V}_1\overline{V}_2$ de $\overline{U}$ et $J_2J_1JJ_{-1}J_{-2}$ de P ont en commun l'espace à trois dimensions $J_1JJ_{-1}J_{-2}$, donc les points U, $\overline{U}$, P sont en ligne droite. De même, les hyperplans polaires des points V, $\overline{V}$, P ont en commun l'espace à trois dimensions $J_2J_1JJ_{-1}$, donc ces points sont en ligne droite.

On démontre de même que le point P_i est l'intersection des droites $V_{i-1}\overline{V}_{i-1}$ et $V_i\overline{V}_i$. Le point P_{-i} est l'intersection des droites $U_{i-1}\overline{U}_{i-1}$ et $U_i\overline{U}_i$. On obtient donc une suite

$$\ldots, P_n, \ldots, P_1, P, P_{-1}, \ldots P_{-m}, \ldots \qquad (\mathcal{P})$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des v et que nous désignerons par $\mathcal{P}$.

2. Supposons que la suite de Laplace L s'arrête au point U_n en présentant le cas de Laplace et la suite $\overline{L}$ au point $\overline{U}_{n+1}$ en présentant le cas de Laplace également. On sait qu'alors les coordonnées des points U_n, $\overline{U}_{n+1}$ ne dépendent que de v. Nous nous placerons dans le cas général, où les courbes (U_n), $(\overline{U}_{n+1})$ n'appartiennent pas à des hyperplans.

Nous avons démontré que dans ces conditions, la suite $\mathcal{J}$ s'arrête au point J_{n+1} en présentant le cas de Laplace et que ce point coïncide avec le point $\overline{U}_{n+1}$; de plus, ce point appartient à la droite $U_nU_n^{01}$.

La suite de Laplace L s'arrête au point V_{n+2} en présentant le cas de Goursat et la suite $\overline{L}$ au point $\overline{V}_{n+3}$ en présentant également le cas de Goursat. La suite $\mathcal{J}$ s'arrête au point $J_{-(n+3)}$ en présentant toujours le cas de Goursat et ce point coïncide d'ailleurs avec V_{n+2}.

Nous allons voir que la suite $\mathcal{P}$ s'arrête également dans les deux sens.

3. Considérons le point P_{n-1}, pôle de l'hyperplan

$$J_{n-3}J_{n-2}J_{n-1}J_nJ_{n+1}.$$

Le raisonnement fait plus haut montre que P_{n-1} se trouve sur la droite $V_{n-2}\overline{V}_{n-2}$. D'autre part les hyperplans polaires des points V_{n-1}, $\overline{V}_{n-1}$, soit respectivement

$$U_{n-3}U_{n-2}U_{n-1}U_nU_n^{01} \quad \text{et} \quad \overline{U}_{n-3}\ldots\overline{U}_{n+1},$$

contiennent l'espace $J_{n-2}J_{n-1}J_nJ_{n+1}$, donc le point P_{n-1} appartient à la droite $V_{n-1}\overline{V}_{n-1}$.

Le pôle de l'hyperplan $J_{n-2}J_{n-1}J_nJ_{n-1}J_{n+1}^{01}$ passe par l'espace à trois dimensions dont il vient d'être question, donc ce pôle, soit P_n, se trouve sur la droite $V_{n-1}\overline{V}_{n-1}$.

Les hyperplans polaires des points V_n, $\overline{V}_n$ sont respectivement

$$U_{n-2}U_{n-1}U_nU_n^{01}U_n^{02} \quad \text{et} \quad \overline{U}_{n-2}\overline{U}_{n-1}\overline{U}_n\overline{U}_{n+1}\overline{U}_{n+1}^{01}.$$

Observons que l'on a, $\overline{U}_{n+1} \equiv J_{n+1}$ appartenant à $U_nU_n^{01}$,

$$\overline{U}_{n+1} = U_n + \lambda U_n^{01}.$$

On en déduit

$$\overline{U}_{n+1}^{01} = U_n^{01}(1 + \lambda^{01}) + \lambda U_n^{02},$$

donc $\overline{U}_{n+1}^{01} \equiv J_{n+1}^{01}$ appartient à la droite $U^{01}U_n^{02}$. Il en résulte que les hyperplans polaires de V_n, $\overline{V}_n$ se rencontrent suivant l'espace à trois dimensions $J_{n-1}J_nJ_{n+1}J_{n+1}^{01}$, qui appartient également à l'hyperplan polaire de P_n, donc ce point se trouve sur la droite $V_n\overline{V}_n$.

Considérons maintenant les hyperplans

$$U_{n-1}U_nU_n^{01}U_n^{02}U_n^{03}, \quad \overline{U}_{n-1}\overline{U}_n\overline{U}_{n+1}\overline{U}_{n+1}^{01}\overline{U}_{n+1}^{02}, \quad J_{n-1}J_nJ_{n+1}J_{n+1}^{01}J_{n+1}^{02}$$

et désignons par P_{n+1} le pôle du dernier de ces hyperplans. Observons que l'on peut démontrer, comme plus haut, que le point $J_{n+1}^{02} \equiv \overline{U}_{n+1}^{02}$ appartient à la droite $U_n^{02}U_n^{03}$. Les trois hyperplans considérées ont donc en commun l'espace à trois dimensions $J_nJ_{n+1}J_{n+1}^{01}J_{n+1}^{03}$. On en conclut que les points V_{n+1}, $\overline{V}_{n+1}$ et

P_{n+1} sont en ligne droite. On voit d'autre part que P_{n+1} appartient à la droite $V_n\overline{V}_n$.

Considérons les hyperplans

$$U_nU_n^{01}U_n^{02}U_n^{03}U_n^{04}, \quad \overline{U}_n\overline{U}_{n+1}\overline{U}_{n+1}^{01}\overline{U}_{n+1}^{02}\overline{U}_{n+1}^{03}, \quad J_nJ_{n+1}J_{n+1}^{01}J_{n+1}^{02}J_{n+1}^{03},$$

dont les pôles sont respectivement V_{n+2}, $\overline{V}_{n+2}$ et un point que nous désignerons par P_{n+2}. Ce point appartient à la droite $V_{n+1}\overline{V}_{n+1}$. D'autre part, le point $\overline{U}_{n+1}^{03} \equiv J_{n+1}^{03}$ appartenant à la droite $U_n^{03}U_n^{04}$, le point P_{n+2} appartient à la droite $V_{n+2}\overline{V}_{n+2}$, c'est-à-dire à la génératrice de la développable dont l'arête de rebroussement est la courbe $(\overline{V}_{n+3})$, droite qui varie avec v, mais non avec u.

Observons que le point J_n dépend de u et de v, donc, lorsque u varie seul, le point P_{n+2} varie et décrit la droite $V_{n+2}\overline{V}_{n+2}$ ou $\overline{V}_{n+3}\overline{V}_{n+3}^{01}$.

Observons enfin que les hyperplans $\overline{U}_{n+1} \dots \overline{U}_{n+1}^{04}$, $J_{n+1} \dots J_{n+1}^{04}$ coïncident, donc le pôle P_{n+3} de ce dernier coïncide avec $\overline{V}_{n+3}$.

On voit donc que *la suite $\mathcal{P}$ se termine au point* P_{n+3} *en présentant le cas de Goursat.*

4. Le point P_{-n}, pôle de l'hyperplan $J_{-(n-2)} \dots J_{-(n+2)}$, est l'intersection des droites $U_{n-1}\overline{U}_{n-1}$ et $U_n\overline{U}_n$.

Désignons par $P_{-(n+1)}$ le pôle de l'hyperplan $J_{-(n-1)} \dots J_{-(n+3)}$ et considérons l'hyperplan $\overline{V}_{n-1} \dots \overline{V}_{n+3}$, dont le pôle est le point $\overline{U}_{n+1}$. Ces deux hyperplans ont en commun l'espace à trois dimensions $V_{n-1}V_nV_{n+1}V_{n+2}$, dont la conjuguée est la droite $U_nU_n^{01}$. Il en résulte que le point $P_{-(n+1)}$ appartient à la droite $U_nU_n^{01}$.

D'autre part, il appartient aussi à la droite $U_n\overline{U}_n$, car les hyperplans polaires des points U_n, $\overline{U}_n$ ont en commun l'espace $J_{-(n-1)} \dots J_{-(n+2)}$, qui appartient à l'hyperplan polaire de $P_{-(n+1)}$.

On en conclut que *la suite $\mathcal{P}$ se termine au point* $P_{-(n+1)}$ *en présentant le cas de Laplace.*

5. Dans le cas $n = 0$, la surface (x) est une réglée et la surface $(\bar{x})$ une surface dont les asymptotiques u appartiennent à des complexes linéaires. Le point J_1 coïncide avec le point $\overline{U}_1$, le point J_{-3} avec le point V_2, le point P_{-1} avec le point U et le point P_3 avec le point $\overline{V}_3$.

Dans le cas $n = 1$, les asymptotiques u de (x) appartiennent à des complexes linéaires et les réglées asymptotiques gauches le long de courbes u de la surface $(\bar{x})$ appartiennent également à des complexes linéaires. Le point J_i coïncide avec le point $\overline{U}_2$ et le point U_{-4} avec le point V_3. Le point P_{-2} coïncide avec le point U_1 et le point P_4 avec le point $\overline{V}_4$.

Liège, le 14 septembre 1954.