Bulletin de la Classe des sciences

Sur une congruence W particulière

Lucien Godeaux

Résumé
Étude d'une congruence W telle que les suites de Laplace associées dans l'espace S5 à ses nappes focales ont leurs points homologues satisfaisant à des équations de Laplace identiques. La congruence appartient à un complexe linéaire.

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Sur une congruence W particulière,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Étude d'une congruence W telle que les suites de Laplace associées dans l'espace S_5 à ses nappes focales ont leurs points homologues satisfaisant à des équations de Laplace identiques. La congruence appartient à un complexe linéaire.

Au cours d'une étude sur les congruences W, nous avons rencontré une congruence particulière qui nous paraît digne d'intérêt. Si nous désignons par (x), $(\bar{x})$ les nappes focales d'une congruence W et par

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots$$

et

$$\ldots, \overline{U}_n, \ldots, \overline{U}_1, \overline{U}, \overline{V}, \overline{V}_1, \ldots, \overline{V}_n, \ldots$$

les suites de Laplace qui leur sont associées dans l'espace à cinq dimensions (1), les points U_n et $\overline{U}_n$ d'une part, les points V_n et $\overline{V}_n$ d'autre part, satisfont aux mêmes équations de Laplace. La congruence appartient à un complexe linéaire.

Nous utilisons dans cette courte note les mêmes notations que dans notre exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace réglé* (2).

1. Soit (x) une surface rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées normales de Wilczynski du point x de cette

(1) *Sur quatre suites de Laplace associées à une congruence W* (BULLETIN DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1954, pp. 880-885).
(2) Actualités scient. et ind., n° 138 (Paris, Hermann, 1934).

surface satisfont au système d'équations aux dérivées partielles, complètement intégrable.

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1x = 0,$$
$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2x = 0.$$

Les conditions d'intégrabilité sont

$$\left.\begin{aligned} a^{20} + c_2^{10} + 2ba^{01} + 4ab^{01} &= 0, \\ b^{20} + c_1^{01} + 2ab^{10} + 4ba^{10} &= 0, \\ c_1^{02} + 2ac_1^{10} + 4a^{10}c_1 &= c_2^{20} + 2bc_2^{01} + 4b^{01}c_2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Supposons que (x) soit une surface focale d'une congruence W. Désignons cette congruence par (j) et supposons que l'équation différentielle des développables d'une famille soit

$$\mu du + \lambda dv = 0.$$

L'équation des développables de la seconde famille sera

$$\mu du - \lambda dv = 0$$

et le second foyer de la droite j sera donné par

$$\nu x + \lambda x^{10} - \mu x^{01}.$$

On peut, comme l'a montré Demoulin, disposer d'un facteur de proportionnalité des fonctions λ, μ pour que la condition pour que (j) soit une congruence W se traduise par

$$\lambda^{01} + 2a\mu = 0, \quad \mu^{10} + 2b\lambda = 0. \qquad (2)$$

Un calcul simple montre que le second foyer est donné par

$$-(\lambda^{10} - \mu^{01})x + 2\lambda x^{10} - 2\mu x^{01}.$$

Attachons au point x le tétraèdre mobile de Cartan, dont les sommets sont les points

$$x, \; m = x\,(\log a)^{10} - 2x^{10}, \; n = x\,(\log b)^{01} - 2x^{01},$$
$$y = [8ab + (\log a)^{10}(\log b)^{01}]x + 2x^{10}(\log b)^{01} + 2x^{01}(\log a)^{10} - 4x^{11}.$$

Le second foyer $\bar{x}$ de la droite j peut s'écrire sous la forme

$$\bar{x} = (\lambda_1 - \mu_1)x + \lambda m - \mu n, \tag{3}$$

en posant

$$\lambda_1 = \lambda^{10} - \lambda (\log a)^{10}, \ \mu_1 = \mu^{01} - \mu (\log b)^{01}.$$

2. De la relation (3), on déduit [1]

$$2\bar{x}^{10} - \bar{x} (\log a)^{10} = [2\lambda_2 + 2\lambda_1 (\log ak_1)^{10} + \alpha\lambda]x + \\ + (\lambda_1 + \mu_1)m - \mu y, \tag{4}$$

où l'on pose

$$\lambda_2 = \lambda_1^{10} - \lambda_1 (\log ak_1)^{10}, \ k_1 = -(\log a)^{11} + 4ab,$$
$$\alpha = 2 (\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^{2} + 4(b^{01} + c_1).$$

On obtient de même

$$2\bar{x}^{01} - \bar{x} (\log b)^{01}$$
$$= -[2\mu_2 + 2\mu_1 (\log bh_1)^{01} + \beta\mu]x - (\lambda_1 + \mu_1)n + \lambda y. \tag{5}$$

On déduit de ces deux formules

$$2(\lambda\bar{x}^{10} + \mu\bar{x}^{01}) - [\lambda_1 + \lambda (\log a)^{10} + \mu_1 + \mu (\log b)^{01}]\bar{x} =$$
$$[\lambda \{ 2\lambda_2 + 2\lambda_1 (\log ak_1)^{10} + \alpha\lambda \} -$$
$$\lambda_1^2 - \mu \{ 2\mu_2 + 2\mu_1 (\log bh_1)^{01} + \beta\mu \} + \mu_1^2]x,$$

qui donne x en fonction de $\bar{x}$, $\bar{x}^{10}$, $\bar{x}^{01}$.

3. En dérivant la relation (4) par rapport à u et en tenant compte de (5), on obtient

$$4\bar{x}^{20} - 8b\bar{x}^{01} + (8b^{01} + 4c_1)\bar{x} = 2\varphi_a x,$$

[1] Nous utilisons les valeurs de m^{10}, m^{01}, ..., y^{01} données dans notre exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace réglé* (*loc. cit.*).

où l'on a posé

$$\varphi_\alpha = 2\lambda_3 + 2\lambda_2 (\log a^3 k_1^2 k_2)^{10} + 2\lambda_1 \alpha_1 + \alpha\lambda (\log a^2\alpha)^{10} + 4b[\mu_2 + \mu_1 (\log bh_1)^{01} + \beta\mu],$$

$$k_2 = -(\log ak_1)^{11} + k_1,$$

$$\alpha_1 = \alpha + (\log ak_1)^{20} + (\log ak_1)^{10}(\log a^2 k_1)^{10},$$

$$\beta = 2 (\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}} + 4(a^{10} + c_2).$$

On obtient de même

$$4\bar{x}^{02} - 8a\bar{x}^{10} + (8a^{10} + 4c_2)\bar{x} = -2\varphi_\beta x,$$

en posant

$$\varphi_\beta = 2\mu_3 + 2\mu_2 (\log b^3 h_1^2 h_2)^{01} + 2\mu_1\beta_1 + \beta\mu (\log b^2\beta)^0{}_1 + 4a[\lambda_2 + \lambda_1 (\log ak_1)^{10} + \alpha\lambda],$$

$$h_2 = -(\log bh_1)^{11} + h_1,$$

$$\beta_1 = \beta + (\log bh_1)^{02} + (\log bh_1)^{01} (\log b^2 h_1)^{01}.$$

On a d'ailleurs

$$\varphi_\alpha^{01} = 2b\varphi_\beta, \quad \varphi_\beta^{10} = 2a\varphi_\alpha.$$

En général, φ_α et φ_β ne sont pas nuls, mais nous allons considérer la congruence W particulière pour laquelle on a $\varphi_\alpha = 0$ et par conséquent $\varphi_\beta = 0$.

Dans ces conditions, le point $\bar{x}$ satisfait aux équations

$$\bar{x}^{20} - 2b\bar{x}^{01} + (2b^{01} + c_1)\bar{x} = 0,$$

$$\bar{x}^{02} - 2a\bar{x}^{10} + (2a^{10} + c_2)\bar{x} = 0.$$

Si l'on écrit que ce système d'équations est complètement intégrable, on retrouve les équations (1).

4. Si nous désignons par U, V les points qui représentent sur l'hyperquadrique Q de S_5 les tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01} au point x à la surface (x), nous avons

$$U^{10} + 2bV = 0, \qquad V^{01} + 2aU = 0.$$

Soient de même $\bar{U}$, $\bar{V}$ les points de Q qui représentent les tangentes asymptotiques $\bar{x}\bar{x}^{10}$, $\bar{x}\bar{x}^{01}$ au point $\bar{x}$ à la surface $(\bar{x})$, nous avons

$$\bar{U}^{10} = 2b\bar{V}, \quad \bar{V}^{01} = 2a\bar{U}.$$

Le point J, qui représente la génératrice j de la congruence W est l'intersection des droites UV, $\bar{U}\bar{V}$ et on a

$$J = \lambda U - \mu V.$$

Les points U, $\bar{U}$ satisfont à la même équation de Laplace

$$U^{11} - U^{10} (\log b)^{01} - 4abU = 0.$$

et de même, les points V et $\bar{V}$ satisfont à la même équation

$$V^{11} - V^{01} (\log a)^{10} - 4abV = 0.$$

Les transformés de Laplace U_1, $\bar{U}_1$ de U, $\bar{U}$ dans le sens des v sont

$$U_1 = U^{01} - U (\log b)^{01}, \qquad \bar{U}_1 = \bar{U}^{01} - \bar{U} (\log b)^{01}$$

et satisfont par conséquent à la même équation de Laplace

$$U_1^{11} - U_1^{10} (\log b)^{01} - h_1 U_1 = 0.$$

Il est facile de vérifier que si nous désignons par

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U_1, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots$$

et

$$\ldots, \bar{U}_n, \ldots, \bar{U}_1, \bar{U}, \bar{V}, \bar{V}_1, \ldots, \bar{V}_n, \ldots$$

les suites de Laplace de S_5 respectivement attachées aux surfaces (x), $(\bar{x})$, les points homologues satisfont à la même équation de Laplace.

5. Posons

$$\psi = \lambda[2\lambda^2 + 2\lambda_1 (\log ak_1)^{10} + \alpha\lambda] - \lambda_1^2 - \mu[2\mu_2 + 2\mu_1 (\log bh_1)^{01} + \beta\mu] + \mu_1^2.$$

Nous avons établi plus haut que l'on a

$$2(\lambda\bar{x}^{10} + \mu\bar{x}^{01}) + [\lambda_1 + \lambda\ (\log\ a)^{10} + \mu_1 + \mu\ (\log\ b)^{01}]\bar{x} = \psi x,$$

par conséquent, nous avons

$$2\lambda\bar{\mathrm{U}} + 2\mu\bar{\mathrm{V}} + 2\psi\mathrm{J} = 0.$$

Le point P, pôle par rapport à Q de l'hyperplan $\mathrm{J}_2\ \mathrm{J}_1\ \mathrm{J}\ \mathrm{J}_{-1}\ \mathrm{J}_{-2}$, c'est-à-dire seconde image dans S_5 du complexe linéaire osculateur à la congruence (j) le long de la droite j, est l'intersection des droites $\mathrm{U}\bar{\mathrm{U}}$, $\mathrm{V}\bar{\mathrm{V}}$. Or, on a, en comparant les expressions de J sur les droites UV, $\bar{\mathrm{U}}\bar{\mathrm{V}}$,

$$\lambda\bar{\mathrm{U}} + \mu\bar{\mathrm{V}} = -\lambda\psi\mathrm{U} + \mu\psi\mathrm{V}.$$

On en conclut

$$\mathrm{P} = \lambda[\bar{\mathrm{U}} + \psi\mathrm{U}] = \mu[\psi\mathrm{V} - \bar{\mathrm{V}}].$$

Un calcul simple montre que l'on a

$$\psi^{10} = \lambda\varphi_\alpha = 0, \quad \psi^{01} = -\mu\varphi_\beta = 0.$$

On obtient donc

$$\mathrm{P}^{10} = \lambda^{10}\ [\bar{\mathrm{U}} + \psi\mathrm{U}] + 2b\lambda[\bar{\mathrm{V}} - \psi\mathrm{V}],$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{P}^{10} - \left[(\log\ \lambda)^{10} - 2b\frac{\lambda}{\mu}\right]\mathrm{P} = 0.$$

On obtient de même

$$\mathrm{P}^{01} - \left[(\log\ \mu)^{01} - 2a\frac{\mu}{\lambda}\right]\mathrm{P} = 0.$$

On en conclut que lorsque u, v varient, le point P reste fixe, donc *la congruence* (j) *appartient à un complexe linéaire* dont la seconde image dans S_5 est le point P.

6. On a également

$$\mathrm{P}^{01} + 2a\frac{\mu}{\lambda}\mathrm{P} = \lambda\ [\bar{\mathrm{U}}_1 + \psi\mathrm{U}_1] + \mathrm{P}\ (\log\ b)^{01}.$$

On en conclut

$$\lambda[\overline{U}_1 + \psi U_1] = P\left(\log\frac{\mu}{b}\right)^{01},$$

ce qui montre bien que la droite $U_1\overline{U}_1$ passe par P.

On démontre de même que les droites $U_n\overline{U}_n$ et $V_n\overline{V}_n$ passent par le point P. D'une manière précise, les points

$$\overline{U}_n + \psi U_n, \qquad \psi V_n - \overline{V}_n$$

coïncident avec P.

Si l'on désigne par $\Omega(p, q) = 0$ l'équation de la polarité par rapport à l'hyperquadrique Q, on a

$$\Omega(P, P) = \lambda^2\mu^2\psi \begin{vmatrix} x \\ m \\ n \\ y \end{vmatrix}.$$

Le déterminant n'étant pas nul, P ne peut appartenir à l'hyperquadrique et le complexe linéaire contenant (j) ne peut être spécial, ce qui est géométriquement évident.

Liège, le 29 octobre 1954.