L'Ecole de Géométrie de l'Université de Liége.

NOTE HISTORIQUE

PAR

Lucien GODEAUX

Candidat en sciences physiques et mathématiques.

Présentée en Conférence aux Fêtes jubilaires de l'A. E. E. S.

Depuis l'établissement des Universités dans notre pays, en 1817, une longue série de travaux dûs à leurs maîtres est venue accroître le patrimoine de l'Ecole belge de Géométrie, fondée il y a près d'un siècle par Quetelet et Dandelin. J'ai voulu examiner plus particulièrement la part qui revient à notre Alma Mater dans cet accroissement, peut-être n'y ai-je qu'imparfaitement réussi, mais l'ampleur et la difficulté du sujet me laissent espérer votre indulgence. Je me limiterai d'ailleurs aux travaux de quatre géomètres, à savoir : J.-B. Brasseur, François Folie, M. C. Le Paige et François Deruyts. Pour être complet, il m'eût fallut citer Dandelin, Aaron Lévy, Van Rees et d'autres encore, mais ceux-ci n'ont fait que passer quelques années à Liége, et j'ai préféré me limiter à ceux qui y ont passé toute leur vie universitaire. J'aurais voulu aussi ne m'arrêter qu'aux travaux des morts, mais comme vous le verrez tantôt, j'ai été forcé de faire une exception pour M. Le Paige, mon excuse est d'une part la place importante que les travaux de ce géomètre tiennent dans le développement de la géométrie à l'Université de Liége, d'autre part le fait que M. Le Paige ayant abandonné depuis plus de vingt ans la géométrie pour d'autres branches de la science, ceux de ses mémoires que j'aurai à considérer n'appartiennent plus à une époque tout-à-fait récente.

Le premier représentant liégeois de l'Ecole belge de Géométrie fut Brasseur (né à Esch sur l'alzette en 1802, mort à Liége en 1868), ce fut également le premier docteur en sciences physiques et mathématiques sorti de l'Université, où plus tard il professa la géométrie analytique et la géométrie descriptive. Il publia un *Programme d'un cours de géométrie descriptive* (1) qui est un chef d'œuvre de méthode et auquel on recoure encore actuellement. Mais ce n'est pas là que Brasseur donna toute la mesure de ses puissantes facultés, les mémoires originaux qu'on lui doit contiennent des méthodes de démonstration entièrement neuves et dont le point de départ est élémentaire. Nous citerons ses recherches sur

(1) Liége, quatre éditions : 1837, 1850, 1859, 1866.

quelques propriétés des surfaces gauches du second degré démontrées par la géométrie (1), son étude *sur la double génération des surfaces du second ordre par le mouvement d'un cercle* (2), et plus particulièrement son mémoire *sur une nouvelle méthode d'application de la géométrie descriptive à la recherche des propriétés de l'étendue* (3). Comme l'a fait remarquer M. Mansion, ce travail est au fond une exposition de la géométrie projective plane basée sur un seul principe fondamental. Rappelons brièvement en quoi consiste ce principe : supposons que l'on nous donne les projections horizontales et verticales d'une infinité de courbes tracées sur une surface donnée. Il y aura certains points de l'épure qui seront à la fois projections verticale et horizontale d'un même point d'une courbe et ces points seront sur un certain lieu géométrique ; et bien, d'après le théorème de Brasseur, l'ordre de ce lieu est au plus égal à celui de la surface. En réalité, le principe de Brasseur est un peu plus général, l'auteur considère en effet des projections orthogonales sur deux plans rectangulaires ou non, tandis que dans l'explication précédente, nous avons supposé ces plans rectangulaires. Dans la suite de son mémoire, Brasseur applique son théorème aux droites et aux coniques, dont il trouve de nombreuses propriétés déjà connues ou nouvelles.

Liagre et De Tilly ont reproché à la méthode de Brasseur l'emploi des propriétés d'une surface pour arriver à des propriétés d'une courbe d'un ordre égal ou inférieur à celui de la surface ; peut-être ce fait nuit-il à la généralité de la méthode, mais tant de beaux théorèmes ont été trouvés par des voies présentant le même défaut, que celui-ci peut être négligé.

Brasseur laissait un élève, François Folie (né à Venloo en 1833, mort à Liége en 1905), qui a consacré à l'étude de la géométrie douze années de sa vie. Pendant ce laps de temps, il a publié un grand nombre de notes qui sont condensées dans trois mémoires dont le dernier fut écrit en collaboration avec M. le Paige. Folie employait dans ses travaux alternativement la méthode synthétique et la méthode analytique, mais en donnant toutefois la préférence à cette dernière. Au point de vue du fond, il a tenté d'étendre aux courbes et aux surfaces les théorèmes de Pappus, de Desorgues et de Pascal, connus alors seulement pour les coniques, et souvent, ses efforts ont été couronnés de succès.

Dans ses *fondements d'une géométrie supérieure cartésienne* (4), Folie inscrit à chaque courbe plane d'ordre n deux polygônes de $n+p$ côtés, appelés polygônes conjugués, tels que chaque côté de l'un deux passe par un des points d'intersection de l'autre avec la courbe, p d'entre eux

(1) Bulletin de l'Académie R. de Belgique, 1851, série 1, tome XVIII.
(2) Mémoires de la Société R. des Sciences de Liége, 1842, série 1, tome I.
(3) Mémoires de l'Académie R. de Belgique (Mém. des Membres) in 4o, 1855, tome XXIX.
(4) Mémoires l'Académie des Sciences de Belgique (Mém. des membres), 1872, t. XXXIX.

exceptés. Il démontre ensuite que si l'on considère deux transversales quelconques d'une courbe d'ordre *n*, et que l'on joigne deux à deux par des droites les points d'intersection de ces transversales avec la courbe mais de manière que deux des nouvelles droites ne se rencontrent pas sur une des transversales, les $n(n-2)$ points d'intersection de la courbe avec les nouvelles droites sont sur une courbe d'ordre $n-2$. En particulier, cette courbe peut dégénérer en $n-2$ droites et l'on a alors sur la courbe d'ordre *n* deux polygônes conjugués de *n* côtés. De ce théorème fondamental se déduit le théorème de Pappus généralisé, à savoir: *dans un système de deux polygônes conjugués de* n *cotés inscrits à une courbe d'ordre* n, *les produits des distances d'un point quelconque aux côtés des deux polygônes sont dans un rapport constant.*

La généralisation du théorème de Desargues, qui se déduit du même principe, conduit Folie à introduire la notion d'involution d'ordre *n* déjà rencontrée par Poncelet (1) Moyennant cette terminologie, le théorème s'énonce : *une tranversale rencontre une courbe d'ordre* n *et les côtés de deux polygônes conjugués de* n *côtés inscrits à cette courbe en trois groupes de* n *points en involution.*

Enfin le théorème de Pascal est généralisé de la manière suivante : *Dans un système de deux polygônes conjugués de* n+p *côtés inscrits à une courbe d'ordre* n, *les côtés non adjacents se coupent sur une courbe d'ordre* p.

Une seconde partie du mémoire est consacrée à la géométrie dans l'espace.

Dans les *Eléments d'une théorie des faisceaux* (2), après être revenu sur l'involution, Folie introduit une généralisation du rapport anharmonique de quatre points, dont Chasles avait montré la fécondité. Folie croyait cette généralisation nouvelle, il reconnut plus tard qu'il avait été devancé de vingt ans par Terquem, mais les écrits de ce géomètre étaient tombés dans l'oubli, même en France, (3) ce qui explique l'erreur de Folie. Quoiqu'il en soit, si les notions de rapport anharmonique et d'involution n'étaient pas nouvelles, on doit à Folie des extensions très intéressantes aux courbes et aux surfaces de théorèmes connus seulement pour les coniques.

Le dernier mémoire de Folie, sur les courbes du troisième ordre, écrit en collaboration avec M. Le Paige (né à Liége en 1852), fut publiée en 1880-82, de sorte qu'il est préférable d'examiner d'abord les travaux de ce dernier géomètre parus avant cette époque.

Dans une longue suite de notes et de mémoires publiés de 1877 à 1887, M. Le Paige a eu surtout en vue l'application de la théorie des formes

---

(1) Traité des propriétés projectives des figures, Paris 18

(2) Mémoires de la Société des Sciences de Liége, 1878, 2e série, tome VII.

(3) F. Folie. *Aux lecteurs des Annali di Matematica*. Bull. de l'Acad. R. de Belgique, 1883, série 3, t. V, pp. 606-609.

algébriques à la géométrie. Cette application l'a conduit à généraliser la notion de rapport anhormanique de quatre points, indépendamment de Folie, par l'interprétation géométrique des invariants simultanés de deux formes binaires de degré n. Les premiers résultats auquels il est arrivé sont consignés dans un important *Mémoire sur quelques applications de la théorie des formes algébriques à la Géométrie.* (1) Le premier chapitre de ce Mémoire est consacré au rapport anharmonique généralisé, le second et le troisième respectivement à l'étude de l'homographie et de l'involution d'ordre n et de rang $n - 1$; celles-ci sont étudiées en prenant des droites comme supports des ponctuelles envisagées. Enfin, un dernier chapitre est consacré aux groupes de points conjugués harmoniques, dont le rapport anharmonique assume la valeur -1; ici se placent des propriétés métriques des involutions, propriétés auquelles M. Le Paige avait déjà consacré précédemment sa *Note sur l'involution des ordres supérieurs* (2).

Comme on vient de le voir, les recherches de Folie et de M. Le Paige avaient de nombreux points communs. Cette association d'idée allait donner naissance au *Mémoire sur les courbes du troisième ordre* (3) qui contient l'étude de la forme trilinéaire binaire, c'est-à-dire de l'homographie cubique de rang deux. Après avoir remarqué que le point commun à trois rayons correspondants de trois faisceaux homographiques décrit une courbe du troisième ordre, les auteurs arrivent aux principales propriétés de ces courbes par une interprétation convenable des invariants de la forme.

Après la publication de ce mémoire, Folie abandonnat les recherches géométriques pour l'étude de l'astronomie; M. Le Paige allait arriver à des résultats qui, joints aux précédents, lui valurent en 1883 le prix quinquennal des sciences mathématiques et physiques.

Dans la suite de ses recherches sur l'homographie et l'involution, M. Le Paige a surtout étudié le troisième ordre. Ses *essais de géométrie supérieure du troisième ordre* (4), publiés contemporairement au travail d'Emile Weyr sur le même sujet, constituent une exposition didactique de ces théories. Entre autres problèmes abordés par M. Le Paige dans ce mémoire, nous citerons celui des groupes neutres, celui des groupes de ramification et celui de la construction des groupes d'une involution donnée sur une droite; enfin il étudie le rapport anharmonique de six points et les groupes polaires d'une involution. M. Le Paige est encore revenu sur ces qnestions dans sa *Note sur l'homographie du troisième ordre* (5) et dans un mémoire *sur l'involution cubique* (6). On lui doit aussi le calcul du

(1) Mémoires de l'Académie R. de Belgique (Mém. couron. in-4o) 1879, t. XLII.

(2) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1877, t. II.

(3) Mémoires de l'Académie R. de Belgique (Mém. des membres, in-4o), 1880, t. XLIII 1882, t. XLV.

(4) Mémoire de la Société R. des Sciences de Liége, 1882, série 2, t. X.

(5) Bulletin de l'Académie Royal de Belgique, 1883, série 3, t. V.

(6) Mémoire de la Société R. des Sciences de Liége, 1883, série 2, t. XI.

nombre de groupes communs à deux involutions placées sur le même support (1), qui plus tard servi de base à un intéressant travail de M. Stuyvaert (2). Signalons encore une étude de l'homographie du quatrième ordre (3) et une note sur l'homographie et l'involution d'ordre *n* (4).

Toutes les recherches de M. Le Paige que nous venons de citer ont trait aux homographies et aux involutions sur des entités à une dimension mais il s'est aussi occupé des extensions de ces notions aux espaces linéaires à plusieurs dimensions et particulièrement au plan dans note *Sur les homographies dans le plan* (5).

Un autre problème très important abordé avec succès par M. Le Paige est celui de la construction des surfaces algébriques passant par des points donnés en nombre suffisant. Dans une première note (6), il construit la surface du second ordre passant par neuf points donnés, puis dans un important mémoire *Sur les surfaces du troisième ordre* (7), il donne une des plus élégantes constructions de la surface cubique que l'on connaisse, à savoir :

Si un tétraètre se déforme de telle manière que trois de ses faces passent par trois droites données tandis que les sommets opposés décrivent les arêtes d'un trièdre donné et que la quatrième face enveloppe une quadrique touchant les trois faces du trièdre, le quatrième sommet décrira une surface cubique passant par les trois premières droites données et par le sommet du trièdre.

Deux autres notes *Sur la génération de certaines surfaces par des faisceaux quadrilinéaires* (8) et *Sur la forme quadrilinéaire et les surfaces du troisième ordre* (9) sont consacrées à une seconde construction de la surface cubique.

Dans un autre ordre d'idées, citons encore deux notes sur des transformations birationnelles du plan (10).

Dans le cours de ses travaux, M. Le Paige avait signalé plus d'une fois l'utilité de l'emploi d'une espace à *n* dimensions pour l'étude des involutions et homographies unicursales. Cette idée fut reprise par son élève François Deruyts (né à Liége en 1864, mort en 1902).

---

(1) *Sur le nombre des groupes communs à des involutions supérieures marquées sur un même support.* Bull. de l'Académie R. de Belgique, 1886, série 3, t. XI.

(2) *Sur les plans qui coupent en des points d'une conique un système de lignes de l'espace.* Mémoire in-8° de l'Académie R. de Belgique, 1901. t. LXII.

(3) *Sur la forme quadrilinéaire.* Atti della R. Accad. di Torino, 1882, t. XVII.

(4) *Homographies el involutions des ordres supérieurs.* Journal de Teixeira, 1883, t. V.

(5) Bulletin de l'Académie R. de Belgique, 1886, série 3, t. XII.

(6) *Sur les surfaces du second ordre.* Idem, 1883, série 3, t. V.

(7) Acta Mathematica, 1883, t. IV, et 1885, t. V.

(8) Bulletin de l'Académie R. de Belgique, 1884, série 3, t. VIII.

(9) Ibid.

(10) *Sur une représentation géométrique de deux transformations uniformes.* Bulletin de l'Académie R. de Belgique, 1882, série (3), t. III. — *Sur quelques transformations géométriques uniformes.* Ibid t. IV.

Parmi les nombreux travaux de ce géomètre, nous distinguerons en premier lieu son beau *Mémoire sur la théorie de l'involution et de l'homographie unicursale* (1), où se trouvent développées quelques notes publiées précédemment, et qui fut couronné au concours universitaire (1889-1890). Pour donner une idée de l'importance de ce travail, nous dirons que le jury chargé de l'apprécier en avait proposé l'impression aux frais de l'Etat, malheureusement pour des raisons budgétaires, il ne fut pas donné suite à cette proposition. Le mémoire est surtout consacré à l'étude des involutions d'ordres et d'espèces quelconques. La découverte de la représentation d'une involution d'ordre *n* sur la courbe normale d'ordre *n* d'un espace linéaire à *n* dimensions, permit à Deruyts, non seulement de retrouver toutes les propriétés connues avant lui, mais d'en établir une foule d'autres par la simple application du principe de correspondance de Chasles généralisé. Notons que l'auteur était arriver à cette représentation en même temps qu'un géomètre italien, M. G Castelnuovo (2), mais indépendamment de celui-ci. François Deruyt fut moins heureux dans ses recherches sur les homographies, pour lesquelles il ne pût découvrir une représentation absolument générale, mais cette théorie lui doit cependant un grand nombre de résultats importants. Nous ne pouvons passer sous silence les quelques applications du principe de Chasles que l'auteur donne dans le premier chapitre de son mémoire, application qui consiste en une généralisation du théorème de Mac-Laurin et Braikenridge (3) et en une construction de la surface cubique sur laquelle il reviendra plus tard.

Dans des mémoires ultérieurs, François Deruyts a complété ses premières recherches relatives aux groupes singuliers des involutions. Deux premières notes sont consacrées à la recherche des groupes neutres communs à deux ou plusieurs involutions (4), une troisième note a trait à certains groupes d'éléments multiples communs à deux involutions (5) et enfin dans trois dernières publications (6) sont traités les problèmes concernant les groupes neutres d'une involution. L'application des propriétés découvertes

---

(1) Mémoires de la Soc. R. des Sciences de Liége, 1890, s. 2. t. XVII.

(2) *Studio dell' involuzione generale sulle curve razionali mediante la loro curva normale dello sparzio ad* n *dimensiona*. Atti del R. Istituto Veneto, 1886, s. 6, t. IV.

(3) Voir aussi : *Génération linéaire de quelques courbes à éléments multiples*. Mathesis, 1887, t. VII.

(4) *Note sur les groupes d'éléments neutres communs à deux involutions quelconques*. Bull. de l'Acad. R. de Belgique, 1893, s. 3, t. XXVI. — *Sur les groupes d'éléments neutres communs à un nombre quelconque d'involutions*. Ibid. 1894, s. 3, t. XXVII.

(5) *Sur certains groupes d'éléments communs à deux involutions*. Bull. de l'Acad. R. de Belgique, 1896, s. 3, t. XXXI.

(6) *Note sur les groupes neutres à éléments multiples associés à des involutions unicursales. Note sur les éléments neutres de l'involution et leurs applications aux courbes gauches*. Bull. de l'Acad. R. de Belgique, 1898, s. 3, t. XXXV. — *Sur la détermination des éléments neutres d'espèce quelconque*. Ibid. t. XXXVI.

dans ces mémoires successifs fournit des propriétés des courbes gauches dignes d'intérêts (1).

Tous ces travaux ne sont pas les seuls que l'on doive à François Deruyts on lui est redevable de plusieurs constructions de la surface du troisième ordre, notamment de celle-ci, qui est peut-être la plus élégante que l'on connaisse :

Si un triangle se déforme de telle manière que deux de ses côtés s'appuient sur deux couples de droites fixes, tandis que le troisième passe par un point fixe, le sommet opposé décrit une surface du troisième ordre passant par les quatre droites formées (2).

Ce théorème, joint aux recherches sur les groupes neutres des involutions, lui permit d'arriver á ce joli théorème qu'une courbe gauche rationnelle du sixième ordre se trouve sur une seule surface cubique (3).

Nous citerons pour terminer les recherches *Sur quelques transformations géométriques* (4), *Sur la corrélation polaire involutive dans un espace linéaire quelconque* (5), *Sur la construction d'un complexe du second degré* (6), et enfin *Sur la correspondance homographique entre les éléments de deux espaces linéaires quelconques* (7).

Lorsqu'on étudie les travaux de François Deruyts, on est frappé par la facilité avec laquelle on peut le suivre, et au premier abord, cela porte quelquefois le lecteur à douter de la difficulté des problèmes que ce géomètre a résolus, mais si l'on essaie de résoudre par les mêmes méthodes les questions qu'une mort trop tôt venue l'a seule empêché de résoudre, on voit que non seulement chez lui le savant était éminent, mais aussi le professeur, qui savait aplanir les difficultés pour ceux qui voulaient le suivre dans ses hautes spéculations.

Voici le moment venu de clore cet exposé, peut-être n'ai-je qu'imparfaitement réussi à vous montrer la part importante qui revient à l'Université de Liége dans le développement de la géométrie supérieure. Pour achever de vous convaincre, qu'il me suffise de vous dire que les travaux que je viens de rappeler sont cités dans le livre qu'un géomètre éminent, M. Loria, vient de publier sur l'histoire des méthodes géométriques (8).

---

(1) *Sur les sécantes multiples des courbes gauches rationnelles*. Ibid. t. XXXV. — *Sur quelques propriétés des courbes gauches*. — *Sur quelques propriétés des polygônes inscrits aux courbes gauches*. Ibid. t. XXXVI.

(2) *Sur un procédé de génération de la surface cubique*. Ibid., 1892, s. 3, t. XXII.

(3) *Note sur la configuration formée par les quadrisécantes des courbes gauches rationnelles du sixième ordre*. Ibid. 1898, série 3, t. XXXV.

(4) Mémoire de la Société R. des Sciences de Liége, 1887, série 2, t. XIV.

(5) Ibid. 1890, série 2, t. XVII.

(6) Bulletin de l'Académie R. de Belgique, 1892, série 3, t. XXIV.

(7) Mémoires couronnés in 4o de l'Académie R. de Belgique, 1892, t. LII.

(8) Jono Loria. *Il passorto ed il presente delle principali teorie geometriche*. Torino, Carlo Clausen, 1907.

Actuellement, l'Ecole liégeoise est encore dignement représentée par MM. Neuberg, Le Paige, J. Deruyts et par un élève de François Deruyts, M. Fairon. Pour ma part, j'espère que les faibles moyens dont je dispose me permettront d'apporter une modeste contribution à l'édifice dont de si savants maîtres ont jeté les bases.

Liége, 25 Janvier 1910.