Sur l'existence des points singuliers dans les congruences linéaires de coniques (*) ;

par Lucien Godeaux, étudiant à Liége.

Je m'étais proposé d'étudier les congruences linéaires de coniques dépourvues de points singuliers (communs à ∞^1 coniques), et ces recherches m'ont conduit à constater l'impossibilité de pareilles congruences, ce que je démontre dans cette note. Il est vraisemblable que le procédé employé ici pourra servir pour l'étude des congruences de coniques dont l'ordre est supérieur à l'unité : ce sera l'objet de notes ultérieures. On peut remarquer que les résultats qui vont être exposés peuvent être étendus sans difficulté aux congruences de courbes planes.

1. Soit Σ une congruence de coniques d'ordre un et de classe kn, dépourvue de points singuliers. Les coniques de cette congruence se groupent dans les plans tangents

(*) Extrait des *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences, nº 3, pp. 184-186, 1910.

à une surface F de la classe n, de façon que chacun de ces plans contient k coniques.

Les k coniques de la congruence Σ contenues dans un plan tangent à la surface F sont marquées par un groupe de k quadriques appartenant à un système linéaire à cinq dimensions (*). Lorsque le plan varie, ces quadriques décrivent une variété Φ à deux dimensions.

Une quadrique de la variété Φ ne contient qu'une conique de la congruence, car si l'une de ces quadriques, Q, contenait deux coniques ε_1, ε_2 de Σ, par un des points $(Q, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ il passerait deux coniques de la congruence, et celle-ci ne serait pas linéaire.

On en conclut que la surface enveloppe F et la variété doublement infinie de quadriques Φ sont liées par une correspondance $(1, k)$.

2. Les plans tangents à la surface F, passant par un point arbitraire P, forment un cône C, et les quadriques de la variété Φ, passant par le même point, forment une variété simplement infinie Γ. Aux quadriques de la variété Γ correspondent les plans d'une développable Γ^* circonscrite à la surface F. Les cônes C et les développables Γ^* forment sur la surface F des systèmes linéaires triplement infinis sans points de base.

Par un point de l'espace passe une seule conique de la congruence Σ, donc dans la correspondance $(1, k)$ qui lie F et Φ, il n'y a qu'un plan et qu'une quadrique corres-

---

(*) *Détermination des variétés de complexes bilinéaires de coniques*. (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1908, pp. 597-601 et 812-813.)

pondante qui passent par un même point P arbitraire. Un cône C et une développable Γ^* correspondant au même point P ne peuvent, par conséquent, avoir qu'un plan en commun, et la développable Γ^* doit être de première classe, c'est-à-dire constituée par les plans passant par une droite. La surface F devrait donc contenir un système triplement infini de droites, ce qui est impossible; donc :

Une congruence linéaire de coniques possède nécessairement des points singuliers.

Liége, 17 décembre 1909.

Bruxelles. — Imprimerie HAYEZ, rue de Louvain, 112.