ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

Sur un critérium de convergence pour les séries à termes positifs (*)

PAR

Lucien GODEAUX
à Liége

Le critérium de convergence que je me propose d'exposer ici présente quelques analogies avec le théorème classique de Kummer relatif au même sujet.

1. — Considérons la série à termes positifs

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{S}$$

(*) Extrait des *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), nº 5, pp. 403-406, 1910.

et une suite illimitée de quantités positives a_N, a_{N+1}, ..., a_n, ... Soient de plus quatre quantités α, β_0, β_1, γ.

Supposons qu'à partir d'un certain rang N, les termes de la série (S) donnent lieu à la formule

$$u_{N+n+2} = \begin{vmatrix} u_{N+n} & u_{N+n+1} & u_{N+n+2} \\ \alpha & \beta_i & \gamma \\ a_{N+n+2} & a_{N+n+1} & a_{N+n} \end{vmatrix}, \tag{1}$$

dans laquelle i est le reste de la division de n par 2.

Proposons-nous de rechercher des conditions suffisantes pour que la série (S) soit convergente.

Représentons par S_k la somme des k premiers termes de la série (S). Alors on a

$$S_{N+n} = S_{N+1} + u_{N+2} + \dots + u_{N+n},$$

ou pour la formule (1) appliquée aux cas $n = 0, 1, 2, \dots, n-2$:

$$\begin{aligned} S_{N+n} = S_{N+1} &+ u_N(\beta_0 a_N - \gamma a_{N+1}) + u_{N+1}(\gamma a_{N+2} - \alpha a_N) \\ &+ u_{N+2}(\alpha a_{N+1} - \beta_0 a_{N+2}) + u_{N+1}(\beta_1 a_{N+1} - \gamma a_{N+2}) \\ &+ u_{N+2}(\gamma a_{N+3} - \alpha a_{N+1}) + \dots \\ \dots &+ u_{N+n-2}(\beta_i a_{N+n-2} - \gamma a_{N+n-1}) \\ &+ u_{N+n-1}(\gamma a_{N+n} - \alpha a_{N+n-2}) + u_N(\alpha a_{N+n-1} - \beta_i a_{N+n}). \end{aligned}$$

Toutes réductions faites, cette formule s'écrit

$$\left.\begin{aligned} S_{N+n} = S_{N+1} &+ u_N(\beta_0 a_N - \gamma a_{N+1}) + u_{N+1}(\beta_1 a_{N+1} - \alpha a_N) \\ &+ u_{N+n-1}(\gamma a_{N+n} - \beta_j a_{N+n-1}) \\ &+ u_{N+n}(\alpha a_{N+n-1} - \beta_i a_{N+n}) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

j désignant le reste de la division de $n - 1$ par 2.

La quantité S_{N+n} tendra vers une limite finie S lorsque n grandira indéfiniment si l'on a, quel que soit n,

$$\gamma a_{N+n} - \beta_j a_{N+n-1} \leqq 0,$$

$$\alpha a_{N+n-1} - \beta_i a_{N+n} \leqq 0.$$

Ces inégalités peuvent être remplacées par les quatre inégalités suivantes :

$$\gamma a_{N+2k} - \beta_1 a_{N+2k-1} \leqq 0, \tag{3}$$

$$\gamma a_{N+2k+1} - \beta_0 a_{N+2k} \leqq 0, \tag{4}$$

$$\alpha a_{N+2k-1} - \beta_0 a_{N+2k} \leqq 0, \tag{5}$$

$$\alpha a_{N+2k} - \beta_1 a_{N+2k+1} \leqq 0. \tag{6}$$

Théorème. — *Si les termes d'une série positive peuvent se mettre sous la forme* (1), *les* a *étant positifs et les quantités* α, β_0, β_1, γ *satisfaisant aux inégalités* (3), (4), (5) *et* (6), *la série sera convergente.*

En effet, dans (2) on a, quel que soit n,

$$S_{N+n} \leqq S_{N+1} + u_N(\beta_0 a_N - \gamma a_{N+1}) + u_{N+1}(\beta_1 a_{N+1} - \alpha a_N).$$

2. — Les inégalités (3), (4), (5) et (6) sont satisfaites si l'on suppose que la suite a_N, a_{N+1}, ... est croissante et que l'on pose $\alpha = 1$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 1$, $\gamma = -1$. En effet, les inégalités

$$a_{N+2k-1} \leqq a_{N+2k}, \qquad a_{N+2k} \leqq a_{N+2k+1}$$

équivalent à (5) et (6). On a à fortiori

$$-a_{N+2k-1} \leqq a_{N+2k}, \qquad -a_{N+2k} \leqq a_{N+2k+1}.$$

car les quantités a sont positives; ces inégalités équivalent à (3) et (4).

Plus généralement, on a :

THÉORÈME. — *Étant donnée une série à termes positifs*

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

si à partir d'un certain rang N *on a*

$$u_n(a_n + a_{n+1}) - u_{n+1}(a_{n+2} + a_n) + u_{n+2}(a_{n+1} - a_{n+2} - \alpha) = 0,$$

les quantités α *et* $a_N, a_{N+1}, \ldots, a_n, \ldots$ *étant positives et la suite* $a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ *croissante, la série est convergente.*

Liége, 4 avril 1910.

Bruxelles. — Imprimerie HAYEZ, rue de Louvain, 112.