Bulletin de la Classe des sciences

Sur la suite de Laplace associée à une surface et dont trois points appartiennent à l'hyperquadrique de Klein

Lucien Godeaux

Résumé
Étude de la suite de Laplace de l'espace réglé associée à une surface lorsque l'un de ses points, distinct de ceux qui représentent les tangentes asymptotiques à la surface, appartient à l'hyperquadrique de Klein.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Sur la suite de Laplace associée à une surface et dont trois points appartiennent à l'hyperquadrique de Klein,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Étude de la suite de Laplace de l'espace réglé associée à une surface lorsque l'un de ses points, distinct de ceux qui représentent les tangentes asymptotiques à la surface, appartient à l'hyperquadrique de Klein.

A une surface (x) est attachée dans l'espace réglé une suite de Laplace ..., U_n, ..., U_1, U, V, V_1, ..., V_n dont deux points consécutifs, U, V, représentent les tangentes asymptotiques en un point x de la surface. Désignons par Q l'hyperquadrique de Klein, de S_5, dont les points représentent les droites de l'espace. La suite de Laplace considérée est autopolaire par rapport à Q et en général, seuls les points U, V appartiennent à cette hyperquadrique (1).

Nous nous proposons, dans cette note, d'étudier le cas où un troisième point de la suite, U_n, appartient à l'hyperquadrique Q. Nous avons déjà antérieurement étudié le cas $n = 2$; les quadriques de Lie et la surface (x) ne possèdent alors que trois points caractéristiques (2). Lorsque n est quelconque, nous montrons que la suite de Laplace considérée est en quelque sorte inscrite

(1) Voir notre exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace réglé* (ACTUALITÉS SCIENT., n° 138, Paris, Hermann, 1934). Nous utilisons, dans cette note, les notations définies dans cet opuscule.

(2) *Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques* (BULL. DE LA SOC. MATH. DE FRANCE, 1929, pp. 26-41).

dans elle-même, en ce sens que chaque point de la suite appartient au plan déterminé par trois autres points de la suite.

1. Soit (x) une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques u, v. Désignons par U, V les points de l'hyperquadrique de Klein Q de S_5 qui représentent les tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01}. On sait que ces points sont consécutifs dans une suite de Laplace

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots, \tag{1}$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

Les points U_1, V_1 ne peuvent appartenir à Q. Nous ferons comme seule hypothèse sur la suite (1) que le point U_n $(n > 1)$ appartient à Q.

Le point U_n décrit une surface tracée sur Q et le plan tangent à cette surface en U_n contient les points U_{n-1}, U_{n+1}, donc l'hyperplan polaire de U_n par rapport à Q contient les points U_{n-1}, U_{n+1}. On sait qu'il contient également les points V_{n-2}, V_{n-1}, V_n, V_{n+1}, V_{n+2}. Cet hyperplan est tangent à Q en U_n et coupe donc cette hyperquadrique suivant un cône quadratique Q_3 à trois dimensions, de sommet U_n.

Les plans $U_{n-1}U_nU_{n+1}$ et $V_{n-1}V_nV_{n+1}$ sont conjugués par rapport à Q, donc par rapport à Q_3 et par conséquent le second de ces plans passe par U_n.

Le plan $U_{n-1}U_nU_{n+1}$ coupe Q_3 et Q suivant deux droites p_1, p_2 passant par U_n.

Désignons par p la droite de l'espace S_3, contenant la surface (x), représentée sur Q par le point U_n. Les droites p_1, p_2 représentent des faisceaux de rayons contenant la droite p; nous désignerons par S_1, S_2 les sommets de ces faisceaux, par σ_1, σ_2 leurs plans de telle sorte que le faisceau (S_1, σ_1) soit représenté par la droite p_1, le faisceau (S_2, σ_2) par la droite p_2.

La gerbe réglée de sommet S_1 et le plan réglé σ_1 sont représentés sur Q par deux plans ϖ_1, ϖ_1' passant par p_1 et de même, la gerbe réglée de sommet S_2 et le plan réglé σ_2 sont représentés sur Q par deux plans ϖ_2, ϖ_2' passant par p_2.

Le plan $V_{n-1}V_nV_{n+1}$ coupe Q_3 et Q suivant deux droites q_1, q_2, passant par U_n. A ces droites correspondent également dans S_3 deux faisceaux de rayons contenant la droite p.

Les plans $U_{n-1}U_nU_{n+1}$ et $V_{n-1}V_nV_{n+1}$ étant conjugués par rapport à Q_3, chacune des droites p_1, p_2 est conjuguée de chacune des droites q_1, q_2, c'est-à-dire que les droites q_1, q_2 sont situées dans les espaces à trois dimensions tangents à Q_3 le long de p_1 et de p_2. Or, l'espace tangent à Q_3 le long de p_1 n'est autre que l'espace déterminé par les plans ϖ_1, ϖ_1' et l'espace tangent à Q_3 le long de p_2 est déterminé par les plans ϖ_2, ϖ_2'. Il en résulte que la droite q_1 est l'intersection des plans ϖ_1, ϖ_2' et la droite q_2, l'intersection des plans ϖ_2, ϖ_1'. Les faisceaux de rayons correspondants dans S_3 sont les faisceaux (S_1, σ_2) et (S_2, σ_1).

Les plans $U_mU_{m+1}U_{m+2}$ et $V_mV_{m+1}V_{m+2}$ sont conjugués par rapport à Q et les sections de cette hyperquadrique par ces plans représentent deux demi-quadriques ayant pour support une quadrique Φ_m. Actuellement, *la quadrique Φ_{n-1} dégénère en deux plans σ_1, σ_2 si on la considère comme quadrique-lieu, en deux gerbes de rayons de sommets S_1, S_2 si on la considère comme quadrique-enveloppe. Si on la considère comme quadrique réglée, elle dégénère soit dans les deux faisceaux de rayons* (S_1, σ_1), (S_2, σ_2), *soit dans les deux faisceaux de rayons* (S_1, σ_2), (S_2, σ_1).

2. Nous avons montré que les quadriques Φ_m, Φ_{m+1} se touchent en quatre points, caractéristiques pour les deux quadriques. Ces deux quadriques ont donc en commun un quadrilatère gauche dont les génératrices sont représentées sur Q par les points d'intersection de cette hyperquadrique avec les droites $U_{m+1}U_{m+2}$ et $V_{m+1}V_{m+2}$. Nous allons rechercher ce que devient ce résultat lorsqu'il s'agit des quadriques Φ_{n-2}, Φ_{n-1}, ou Φ_{n-1}, Φ_n.

Les quadriques Φ_{n-2}, Φ_{n-1} ont en commun un quadrilatère gauche dont les côtés sont représentés par les points d'intersection de Q avec les droites $U_{n-1}U_n$ et $V_{n-1}V_n$. La première droite touche Q au point U_n et la seconde coupe Q en des points situés sur les droites q_1, q_2.

Il en résulte que le quadrilatère gauche commun aux quadriques Φ_{n-2}, Φ_{n-1}, se compose de la droite p comptée deux fois et de deux droites appartenant l'une au faisceau (S_1, σ_2), l'autre au faisceau (S_2, σ_1). Les points S_1, S_2 sont des points caractéristiques de la quadrique Φ_{n-2}, comptant chacun pour deux. Le plan tangent à l'enveloppe de Φ_{n-2} en S_1 est le plan σ_2 et le plan tangent à cette enveloppe en S_2 est le plan σ_1.

De même, les quadriques Φ_n ont les points S_1, S_2 comme points caractéristiques, chacun comptant pour deux. Les enveloppes des quadriques Φ_{n-2}, Φ_n ont donc deux nappes (S_1), (S_2) en commun, chacune de ces nappes comptent pour deux.

Lorsque u, v varient, la droite p représentée par U_n engendre une congruence (p). Aux développables de cette congruence correspondent les courbes tracées sur la surface (U_n) et dont les tangentes appartiennent à Q. Au point U_n, ces courbes sont donc tangentes l'une à p_1, l'autre à p_2. Il en résulte que les surfaces focales de la congruence (p) sont les surfaces (S_1), (S_2). Les plans focaux de la droite p sont les plans σ_1, σ_2.

La droite représentée par le point U_n engendre une congruence dont les surfaces focales sont (S_1), (S_2) ; ces surfaces font partie de l'enveloppe des quadriques Φ_{n-2}, Φ_n et comptent deux fois dans cette enveloppe.

3. Le point U_n appartenant au plan $V_{n-1}V_nV_{n+1}$, nous pouvons écrire

$$U_n = \lambda_{n-1}V_{n-1} + \lambda_n V_n + \lambda_{n+1}V_{n+1}. \qquad (2)$$

Rappelons que nous avons

$$U^{10} - 2bV = 0, \qquad V^{01} + 2aU = 0$$

puis, en posant

$$h_n = -(\log bh_1h_2 \dots h_{n-1})^{11} + h_{n-1},$$
$$k_n = -(\log \cdot ak_1k_2 \dots k_{n-1})^{11} + k_{n-1},$$

les relations

$$U_n^{01} = U_{n+1} + U_n (\log \cdot bh_1h_2 \dots h_n)^{01}, \quad U_n^{10} = h_nU_{n-1},$$
$$V_n^{10} = V_{n+1} + V_n (\log ak_1k_2 \dots k_n)^{10}, \quad V_n^{01} = k_nV_{n-1}.$$

Nous poserons, pour abréger

$$H_n = \log bh_1h_2 \dots h_n ; \qquad K_n = \log ak_1k_2 \dots k_n.$$

Cela étant, en dérivant la relation (2) par rapport à v, nous avons

$$\left.\begin{aligned} U_{n+1} = \lambda_{n-1}k_{n-1}V_{n+2} + (\lambda^{01}_{n+1} + \lambda_n k_n - \lambda_{n+1}H^{01}_{n+1})V_{n-1} \\ + (\lambda^{01}_n + \lambda_{n+1}k_{n+1} - \lambda_n H^{01}_n)V_n + (\lambda^{01}_{n+1} - \lambda_{n+1}H^{01}_n)V_{n+1}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Dérivons maintenant cette relation par rapport à u ; nous obtenons une relation dont le premier membre est $h_{n+1}U_n$ et dont le second membre ne doit donc plus contenir que des termes en V_{n-1}, V_n, V_{n+1}. Or, par dérivation, on trouve un terme en V_{n+2} dont le coefficient est

$$(\lambda_{n+1}k_{n+1})^{10} + \lambda_{n+1}k_{n+1}K^{10}_{n+2}.$$

Ce coefficient doit être nul et on a donc

$$\lambda^{10}_{n+1} + \lambda_{n+1}K^{10}_{n+1} = 0. \quad (4)$$

Dérivons maintenant la relation (2) par rapport à u ; il vient, en tenant compte de la formule (4),

$$h_n U_{n+1} = (\lambda^{10}_n + \lambda_{n-1} + \lambda_n K^{10}_n)V_n + (\lambda^{10}_{n+1} + \lambda_n + \lambda_{n+1}K^{10}_{n+1})V_{n+1} \\ + \lambda_{n+1}V_{n+2}.$$

On voit donc que le point U_{n-1} appartient au plan

$$V_n V_{n+1} V_{n+2}.$$

Dérivons la relation précédente par rapport à v ; nous obtenons une relation dont le premier membre est

$$h_n U_n + h_n U_{n+1} H^{01}_n.$$

En remplaçant U_{n+1} par sa valeur, nous devons obtenir une relation entre U_n, V_{n-1}, V_n, V_{n+1}. Dans cette relation, le coefficient de V_{n+2},

$$\lambda^{01}_{n+1} - \lambda_{n+1}H^{01}_n$$

doit être nul. On a donc

$$\lambda^{01}_{n+1} = \lambda_{n+1}H^{01}_n. \quad (5)$$

En portant cette valeur dans la relation (3), le terme en V_{n+1} disparaît et U_{n+1} appartient donc au plan $V_{n+2}V_{n+1}V_n$.

4. D'après ce qu'on vient de voir, on peut écrire

$$U_{n+1} = \lambda_{n-2}V_{n-2} + \lambda_{n-1}V_{n-1} + \lambda_n V_n, \tag{6}$$

λ_{n-1} et λ_n ayant naturellement d'autres valeurs que dans la formule (2).

En dérivant cette relation par rapport à u, on en déduit

$$\begin{aligned} h_{n+1}U_n = {} & (\lambda^{10}_{n-2} + \lambda_{n-2}K^{10}_{n-2})V_{n-2} + (\lambda^{10}_{n-1} + \lambda_{n-2} + \lambda_{n-1}K^{10}_{n-1})V_{n-1} \\ & + (\lambda^{10}_n + \lambda_{n-1} + \lambda_n K^{10}_n)V_n + \lambda_n V_{n+1}. \end{aligned}$$

En vertu de la relation (2), le terme en V_{n-2} doit disparaître et on a

$$\lambda^{10}_{n-2} + \lambda_{n-2}K^{10}_{n-2} = 0. \tag{7}$$

Dérivons maintenant la relation (6) par rapport à v. On obtient

$$\begin{aligned} U_{n+2} = {} & \lambda_{n-2}K_{n-2}V_{n-3} + (\lambda^{01}_{n-2} + k_{n-2}\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}H^{01}_{n+1})V_{n-2} \\ & + (\lambda^{01}_{n-1} + \lambda_n k_n - \lambda_{n-1}H^{01}_{n+1})V_{n-1} + (\lambda^{01}_n - \lambda_n H^{01}_{n+1})V_n. \end{aligned} \tag{8}$$

En dérivant cette relation par rapport à u, on obtient dans le premier membre $h_{n+2}U_{n+1}$ et dans le second membre, on doit obtenir une expression contenant V_{n-2}, V_{n-1}, V_n. Le terme en V_{n-1} doit donc disparaître et on a

$$\lambda^{01}_n = \lambda_n H^{01}_{n+1}. \tag{9}$$

Observons d'ailleurs que dans la relation obtenue en dérivant (8) par rapport à u, le terme en V_{n-3} disparaît en vertu de (7).

Introduisant la relation (9) dans (8) on voit que le point U_{n+2} appartient au plan $V_{n-2}V_{n-1}V_n$.

On démontrerait de même que le point U_{n-1} appartient au plan $V_nV_{n+1}V_{n+2}$, et ainsi de suite.

5. D'une manière générale, le point U_{n+i} appartient au plan $V_{n-i-1}V_{n-i}V_{n-i+1}$, que i soit positif ou négatif. Pour que cet énoncé ait un sens précis, il faut cependant que $n+i$ et $n-i-1$ ne soient pas négatifs.

Pour $i = -n$, on trouve que le point U_0 ou U appartient au plan $V_{2n-1}V_{2n}V_{2n+1}$. Pour $i = -n-1$, on trouve que le point

U_{-1} ou V appartient au plan $V_{2n}V_{2n+1}V_{2n+2}$. D'une manière générale, on trouve que le point V_j appartient au plan $V_{2n+j}V_{2n+j+1}V_{2n+j+2}$.

De même, pour $i = n$, le point U_{2n} appartient au plan UVV_1 ; pour $i = n+1$, le point U_{2n+1} appartient au plan U_1UV ; pour $i = n+2$, le point U_{2n+2} appartient au plan U_2U_1U. D'une manière générale, le point U_{2n+j} appartient au plan $U_jU_{j-1}U_{j-2}$.

Nous pouvons donc énoncer d'une manière générale que :

Le point U_{n+i} *appartient au plan* $V_{n-i-1}V_{n-i}V_{n-i+1}$, *que* i *soit positif ou négatif, à condition de remplacer les points* $U_{-\alpha-1}$, $V_{-\alpha-1}$ *respectivement par les points* V_α, U_α.

Observons qu'en particulier, le plan $U_{n-1}U_nU_{n+1}$ contient le point U_{3n+1}.

Le point U_{n+i} $(i \geqslant -n)$ appartient au plan $V_{n-i-1}V_{n-i}V_{n-i+1}$. Celui-ci est le conjugué, par rapport à Q, du plan $U_{n-i-1}U_{n-i}U_{n-i+1}$. Ce plan contient le point U_{3n-i+1} ; donc les points U_{n+i}, U_{3n+1-i} sont conjugués par rapport à Q. Si l'on représente par

$$\Omega(p, q) = 0$$

l'équation de la polarité par rapport à Q, on a donc

$$\Omega(U_{n+i}, U_{3n-i+1}) = 0.$$

De même, le point V_j appartient au plan $V_{2n+j}V_{2n+j+1}V_{2n+j+2}$ dont le conjugué, par rapport à Q, est le plan

$$U_{2n+j}U_{2n+j+1}U_{2n+j+2}.$$

Ce plan contient le point U_{4n+j+2} et on a donc

$$\Omega(V_j, U_{4n+j+2}) = 0.$$

6. Il existe d'autres relations de polarité entre les points de la suite (1).

En exprimant que le point U_n appartient à Q et que les droites U_nU_{n+1}, U_nU_{n-1} touchent Q en U_n, on a

$$\Omega(U_n, U_n) = 0, \quad \Omega(U_n, U_{n-1}) = 0, \quad \Omega(U_n, U_{n+1}) = 0.$$

En dérivant la dernière de ces relations par rapport à u, on a

$$h_n\Omega(U_{n-1}, U_{n+1}) + h_{n+1}\Omega(U_n, U_n) = 0,$$

d'où

$$\Omega(U_{n-1}, U_{n+1}) = 0. \tag{10}$$

En dérivant cette relation par rapport à v, on a

$$\Omega(U_n + U_{n-1}H^{01}_{n-1}, U_{n+1}) + \Omega(U_{n-1}, U_{n+2} + U_{n+1}H^{01}_{n+1}) = 0,$$

d'où

$$\Omega(U_{n-1}, U_{n+2}) = 0. \tag{11}$$

En dérivant au contraire (10) par rapport à u, on a

$$h_{n-1}\Omega(U_{n-2}, U_{n+1}) + h_{n+1}\Omega(U_{n-1}, U_n) = 0,$$

d'où

$$\Omega(U_{n-2}, U_{n+1}) = 0. \tag{12}$$

En dérivant la relation (11) par rapport à u, on a

$$h_{n-1}\Omega(U_{n-2}, U_{n+2}) + h_{n+2}\Omega(U_{n-1}, U_{n+1}) = 0,$$

d'où

$$\Omega(U_{n-2}, U_{n+2}) = 0. \tag{13}$$

D'une manière générale, supposons que l'on ait

$$\Omega(U_{n-i}, U_{n+i}) = 0, \qquad \Omega(U_{n-i+1}, U_{n+i}) = 0,$$
$$\Omega(U_{n-i}, U_{n+i-1}) = 0. \tag{14}$$

En dérivant la première de ces relations par rapport à u, on en tire

$$h_{n-i}\Omega(U_{n-i-1}, U_{n+i}) + h_{n+i}\Omega(U_{n-i}, U_{n+i-1}) = 0,$$

d'où

$$\Omega(U_{n-i-1}, U_{n+i}) = 0.$$

En dérivant la première des équations (14) par rapport à v, on obtient

$$\Omega(U_{n-i}, U_{n+i+1}) = 0$$

et enfin, en dérivant cette dernière relation par rapport à u,

$$\Omega(U_{n-i-1}, U_{n+i+1}) = 0.$$

Si les relations (14) sont vraies pour une valeur de i, elles sont également vraies pour $i + 1$. Or, elles sont vérifiées pour $i = 0, 1, 2$, donc elles sont vraies quel que soit i.

Les raisonnements précédents supposent que les invariants h ne sont pas nuls. Si un de ces nombres était nul, la suite de Laplace (1) se terminerait en un point, contrairement à l'hypothèse que la seule condition imposée à (1) est $\Omega(U_n, U_n) = 0$.

Dans les relations (14), on peut supposer i positif. Si $i = n$, on a

$$\Omega(U_1 U_{2n}) = 0, \quad \Omega(U_1, U_{2n}) = 0, \quad \Omega(U, U_{2n-1}) = 0.$$

Si $i = n + 1$, on a

$$\Omega(V, U_{2n+1}) = 0, \quad \Omega(U, U_{2n+1}) = 0, \quad \Omega(V, U_{2n}) = 0.$$

Dans les relations (14), si i est supérieur à n, on doit remplacer $U_{-\alpha-1}$ par V_α.

Observons d'ailleurs, ce que nous avons déjà établi géométriquement, que les relations

$$\Omega(U_n, U_{n-1}) = 0, \quad \Omega(U_n, U_{n+1}) = 0$$

sont une conséquence de

$$\Omega(U_n, U_n) = 0 ;$$

on les déduit par dérivation par rapport à u ou par rapport à v.

7. Considérons la quadrique Φ_{n+1}. Les deux demi-quadriques dont elle est le support sont représentées par les sections de Q par les plans

$$U_{n+i} U_{n+i+1} U_{n+i+2} \quad \text{et} \quad V_{n+i} V_{n+i+1} V_{n+i+2}.$$

Le second de ces plans contient le point U_{n+i+1}, par conséquent, la demi-quadrique correspondante au premier plan appartient au complexe linéaire dont ce point est la seconde image.

Le premier plan contient le point U_{3n+i+2}, par conséquent, la demi-quadrique correspondant au second plan appartient au complexe linéaire donc ce point est la seconde image.

Liège, le 28 août 1953.