Bulletin de la Classe des sciences

Recherches sur les points de diramation de troisième catégorie d'une surface multiple (première note)

Lucien Godeaux

Résumé
On considère une surface algébrique contenant une involution cyclique d'ordre premier p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis et une surface normale image de cette involution sur laquelle les points de diramation sont isolés. Un point de diramation de troisième catégorie (et de seconde espèce) est un point multiple en lequel le cône tangent se scinde en quatre cônes rationnels $(\sigma\alpha)$, $(\tau\alpha)$, $(\tau\beta)$, $(\sigma\beta)$. Chacun de ces cônes rencontre le précédent et le suivant suivant une génératrice, mais il n'y a aucune droite commune à deux cônes en dehors des trois génératrices précédentes. On examine dans cette note et dans les suivantes si le point de diramation peut avoir un point double infiniment voisin sur la génératrice commune aux cônes $(\tau\alpha)$, $(\tau\beta)$.

Citer ce document / Cite this document :

Godeaux Lucien. Recherches sur les points de diramation de troisième catégorie d'une surface multiple (première note). In: Bulletin de la Classe des sciences, tome 39, 1953. pp. 1013-1023;

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1953.70026;

https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1953_num_39_1_70026;

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Recherches sur les points de diramation de troisième catégorie d'une surface multiple,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(Première note)

Résumé. – On considère une surface algébrique contenant une involution cyclique d'ordre premier p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis et une surface normale image de cette involution sur laquelle les points de diramation sont isolés. Un point de diramation de troisième catégorie (et de seconde espèce) est un point multiple en lequel le cône tangent se scinde en quatre cônes rationnels (σ_α), (τ_α) (τ_β), (σ_β). Chacun de ces cônes rencontre le précédent et le suivant suivant une génératrice, mais il n'y a aucune droite commune à deux cônes en dehors des trois génératrices précédentes. On examine dans cette note et dans les suivantes si le point de diramation peut avoir un point double infiniment voisin sur la génératrice commune aux cônes (τ_α), (τ_β).

Considérons une surface algébrique F contenant une involution cyclique d'ordre premier impair p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Soit Φ une surface normale image de l'involution, sur laquelle les points de diramation sont isolés. Dans nos travaux antérieurs (1), nous avons appelé point de diramation de seconde espèce et de troisième catégorie un point en lequel le cône tangent à la surface Φ se scinde en quatre cônes

(1) *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités scient., n° 270. Paris, Hermann, 1935) ; *Mémoire sur les surfaces multiples* (Mémoires de l'Acad. roy. de Belgique, 1953) ; *Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples* (Deuxième Colloque de Géométrie algébrique, Liège, 1952, pp. 225-231. (Liège, Thone et Paris, Masson, 1952).

rationnels. Projetons la surface Φ du point de diramation considéré sur un hyperplan de l'espace ambiant et soit Φ_1 la surface obtenue. Au domaine du point de diramation correspondent sur la surface Φ_1 quatre courbes rationnelles σ_α, τ_α, τ_β, σ_β. Les courbes τ_α, τ_β se rencontrent en un point A'_1, les courbes σ_α, τ_α en un point A'_{11} et les courbes τ_β, σ_β en un point A'_{12}. Il n'existe aucun autre point de la surface commun à deux des courbes précédentes. Les points A'_1, A'_{11}, A'_{12} peuvent-ils être doubles pour la surface Φ_1 ? Nous avons construit des exemples où les points A'_{11}, A'_{12} sont effectivement doubles (¹) ; dans cette note et dans celles qui lui feront suite, nous nous occupons du point A'_1.

Nous indiquons un cas où, si une certaine inégalité est satisfaite, le point A_1 est double biplanaire pour la surface Φ'_1.

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I d'ordre premier $p > 2$, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. On sait que l'on peut prendre pour modèle projectif de F une surface normale, appartenant à un espace de dimension aussi grande qu'on le veut, sur laquelle l'involution est déterminée par une homographie cyclique de période p, ayant p axes ponctuels, les points unis appartenant à un seul de ces axes. Le système linéaire $|C|$ des sections hyperplanes de cette surface F contient p systèmes linéaires partiels $|C_0|$, $|C_1|$, ..., $|C_{p-1}|$, le premier dépourvu de points-base, les autres ayant comme seuls points-base les points unis de I, appartenant à cette involution.

On peut choisir F de telle sorte que la dimension de $|C_0|$ soit aussi grande qu'on le veut. En rapportant projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace ayant la dimension de $|C_0|$, on obtient une surface normale Φ, image de l'involution I.

Nous désignons par $|\Gamma_i|$ le système (complet) des courbes qui correspondent sur Φ aux courbes C_i. Les sections hyperplanes de la surface Φ sont les courbes Γ_0.

Soient A un point uni de I sur F, A' le point de diramation

(¹) *Sur quelques points de diramation de seconde espèce et de troisième catégorie d'une surface multiple* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1952, pp. 755-765, 898-907).

qui lui correspond sur Φ. Rappelons que nous avons formé, dans le cas où A est un point uni de seconde espèce, une suite de systèmes linéaires $|C_0'|$, $|C_0''|$, ... de la manière suivante : Les courbes C_0' sont les courbes C_0 passant par A, les courbes C_0'' sont les courbes C_0' assujetties à toucher, en A, une droite (tangente à F) non unie pour l'involution, et ainsi de suite. Le dernier système, $|C_0^{(\nu+1)}|$, où ν est donné par $p = 2\nu + 1$, est formé de courbes ayant en A la multiplicité p et p tangentes variables ; les systèmes précédents ont des tangentes fixes, réunies en deux droites unies pour l'homographie engendrant l'involution sur F.

2. Supposons que A soit un point uni de seconde espèce et de troisième catégorie. Il y a deux entiers α, β, compris entre 1 et p, qui lui sont attachés, tels que

$$\alpha\beta - 1 \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p).$$

Nous avons à considérer les solutions en nombres positifs λ, μ, telles que $\lambda + \mu < p$, des congruences

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \qquad \mu + \beta\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p). \tag{1}$$

Nous avons démontré qu'il existe, dans le domaine du point uni A :

Une suite de $\alpha - 1$ points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$, infiniment voisins successifs de A, unis pour l'involution, les $\alpha - 2$ premiers unis de seconde espèce, le dernier $(\alpha, \alpha - 1)$ uni de première espèce.

Une seconde suite de $\beta - 1$ points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, \beta - 1)$, infiniment voisins successifs de A, les $\beta - 2$ premiers unis de seconde espèce pour l'involution, le dernier, $(\beta, \beta - 1)$, uni de première espèce.

De la première suite se détache, au point (α, θ_α), où θ_α est un entier compris entre 0 et $\alpha - 1$ $(0 < \theta_\alpha < \alpha - 1)$, une suite de points unis infiniment voisins successifs $(\alpha, \theta_\alpha, 1)$, $(\alpha, \theta_\alpha, 2)$, ... Ces points sont unis de seconde espèce sauf le dernier, que nous désignerons par P_α, qui est uni de première espèce.

De la seconde suite, au point (β, θ_β), où $0 < \theta_\beta < \beta - 1$, se détache une suite de points infiniment voisins successifs $(\beta, \theta_\beta, 1)$,

$(\beta, \theta_\beta, 2)$, ... unis de seconde espèce pour l'involution sauf le dernier P_β, qui est uni de première espèce.

Désignons par Φ_1 la surface obtenue en projetant du point A' la surface Φ sur un hyperplan de l'espace ambiant ne passant pas par A'. Au domaine du point A' correspond sur la surface Φ_1 :

Une courbe rationnelle σ_α, représentant le domaine du point $(\alpha, \alpha - 1)$;

Une courbe rationnelle τ_α, représentant le domaine du point P_α ;

Une courbe rationnelle τ_β, représentant le domaine du point P_β ;

Une courbe rationnelle σ_β, représentant le domaine du point $(\beta, \beta - 1)$.

La courbe σ_α rencontre la courbe τ_α en un point qui peut être double pour la surface Φ_1 ; nous supposerons qu'il est équivalent à u_1 courbes rationnelles de degré -2 (on a $u_1 = 0$ si le point est simple).

La courbe σ_β rencontre la courbe τ_β en un point qui peut être double pour la surface Φ_1 et que nous supposerons être équivalent à u_2 courbes rationnelles de degré -2.

Les courbes τ_α et τ_β se rencontrent en un point qui peut également être double pour la surface Φ_1 et que nous supposerons équivalent à t courbes rationnelles de degré -2.

Les courbes σ_α, τ_α, τ_β, σ_β n'ont pas d'autre point commun que ceux qui viennent d'être indiqués.

Posons

$$p = a_1\alpha + b_1, \qquad (b_1 < \alpha),$$
$$p = b_2\beta + a_2, \qquad (a_2 < \beta).$$

Les courbes C'_0 passent un certain nombre de fois $\lambda_1 + \mu_1$ par A et ce point est sur chacune de ces courbes l'origine d'un certain nombre de branches linéaires [passant par les points $(\alpha, \alpha - 1)$, $(\beta, \beta - 1)$] et d'un certain nombre de branches superlinéaires (passant par P_α, P_β). Ces courbes passent précisément a_1 fois par le point $(\alpha, \alpha - 1)$, b_2 fois par le point $(\beta, \beta - 1)$, m_1 fois par le point P_α et m_2 fois par le point P_β.

3. Pour que le point uni A soit de troisième catégorie, les nombres λ_1, μ_1 dont la somme donne la multiplicité des courbes C_0' au point A doivent satisfaire aux équations

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = h_\alpha p, \quad \mu_1 + \beta\lambda_1 = h_\beta p,$$

h_α et h_β devant être des entiers supérieurs à l'unité.

Dans un travail récent (1), nous avons montré que lorsque A a la structure indiquée plus haut, on a

$$p = Aa_1b_2 + Ba_1 + Cb_2 + D,$$

moyennant

$$\begin{aligned}
A &= (t+1)U_1U_2 + (u_2+1)U_1 + (u_1+1)U_2,\\
B &= (t+1)m_2U_1 + U_1 + m_2(u_1+1),\\
C &= (t+1)m_1U_2 + U_2 + m_1(u_2+1),\\
D &= (t+1)m_1m_2 + m_1 + m_2,\\
U_1 &= m_1(u_1+1)+1, \qquad U_2 = m_2(u_2+1)+1.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\alpha &= Ab_2 + B, \qquad & b_1 &= Cb_2 + D,\\
\beta &= Aa_1 + C, \qquad & a_2 &= Ba_1 + D.
\end{aligned}$$

Il est facile de voir que α et b_1 d'une part, β et a_2 d'autre part, sont premiers entre eux. On a d'ailleurs

$$\alpha\beta - 1 = Ap.$$

Le nombre m_1 doit satisfaire aux inégalités

$$(h_\alpha - 1)b_1 < m_1\alpha < h_\alpha b_1.$$

On en déduit

$$h_\alpha = m_1(u_1+1) + 1 = U_1$$

et de même,

$$h_\beta = m_2(u_2+1) + 1 = U_2.$$

(1) *Sur l'ordre d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de la Soc. roy. des Sciences de Liège, 1953, pp. 77-84).

On a donc

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = U_1 p, \qquad \mu_1 + \beta\lambda_1 = U_2 p.$$

On en déduit enfin

$$\lambda_1 = b_2 U_2 + m_2, \qquad \mu_1 = a_1 U_1 + m_1.$$

4. Nous pouvons maintenant indiquer, avec nos nouvelles notations, le comportement des courbes C_0 au point A.

Posons

$$(t+1)\lambda_1 + b_2(u_2+1) = \theta_\alpha[a_1(u_1+1)+1] + \eta_1,$$
$$(t+1)\mu_1 + a_1(u_1+1) = \theta_\beta[b_2(u_2+1)+1] + \eta_2.$$

Les courbes C_0' passent $\lambda_1 + \mu_1$ fois par le point A,

μ_1 fois par les points $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \ldots, (\alpha, \theta_\alpha - 1)$,

$a_1 + m_1(\eta_1 + 1)$ fois par le point (α, θ_α),

a_1 fois par les points $(\alpha, \theta_\alpha + 1), (\alpha, \theta_\alpha + 2), \ldots, (\alpha, \alpha - 1)$,

un certain nombre de fois par les points $(\alpha, \theta_1, 1), \ldots$ et m_1 fois par P_α,

λ_1 fois par les points $(\beta, 1), (\beta, 2), \ldots, (\beta, \theta_\beta - 1)$.

$b_2 + m_2(\eta_2 + 1)$ fois par le point (β, θ_β),

b_2 fois par les points $(\beta, \theta_\beta + 1), (\beta, \theta_\beta + 2), \ldots, (\beta, \beta - 1)$,

un certain nombre de fois par les points $(\beta, \theta_\beta, 1), (\beta, \theta_\beta, 2), \ldots$ et m_2 fois par P_β.

Il en résulte que les courbes $\sigma_\alpha, \tau_\alpha, \tau_\beta, \sigma_\beta$ ont respectivement les ordres a_1, m_1, m_2, b_2.

5. Dans la suite des systèmes $|C_0''|, |C_0'''|, \ldots$ se trouvent des systèmes que nous désignerons par $|\overline{C}_0''|, |\overline{C}_0'''|, \ldots$ dont les courbes passent a_1 fois par le point $(\alpha, \alpha - 1)$ et respectivement $m_1 - 1$, $m_1 - 2, \ldots$ fois par le point P_α. Nous avons montré que ces systèmes correspondaient aux solutions des congruences (I) données par

$$\lambda_i' = (m_1 + 1 - i)[(h_1 - 1)b_1 - \alpha] + b_1,$$
$$\mu_i' = (m_1 + 1 - i)[(h_1 - 1)a_1 + 1] + a_1,$$
$$(i = 2, 3, \ldots, m_1),$$

où h_1 est un entier tel que

$$(h_1 - 1)\,(a_1 + b_1) < \alpha - 1 < h_1(a_1 + b_1).$$

On a d'ailleurs

$$h_\alpha = m_1 h_1 - m_1 + 1,$$

d'où

$$h_1 = u_1 + 2.$$

On en déduit

$$\lambda'_i = (ti + i - t)\lambda_1 + (i - 1)[(u_2 + 1)b_2 + 1],$$
$$\mu'_i = \mu_1 - (i - 1)[(u_1 + 1)a_1 + 1].$$

Dans la suite des systèmes $|C'_0|$, $|C''_0|$, ... se trouvent des systèmes que nous désignerons par $|\overline{\overline{C}}{}''_0|$, $|\overline{\overline{C}}{}'''_0|$, ..., dont les courbes passent b_2 fois par le point $(\beta, \beta - 1)$ et respectivement $m_2 - 1$, $m_2 - 2$, ... fois par le point P_β. Les solutions des congruences (I) qui correspondent à ces systèmes sont

$$\lambda''_i = \lambda_1 - (i - 1)[(u_2 + 1)b_2 + 1],$$
$$\mu''_i = (ti + i - t)\mu_1 + (i - 1)[(u_1 + 1)a_1 + 1],$$
$$(i = 2, 3, \ldots, m_2).$$

Observons que les systèmes $|\overline{C}''_0|$ et $|\overline{\overline{C}}{}''_0|$ ne peuvent coïncider, car cela entraînerait

$$(t + 1)\lambda_1 + 2[(u_2 + 1)b_2 + 1] = 0,$$

ce qui est absurde. Nous supposerons que dans la suite des systèmes $|C'_0|$, $|C''_0|$, ..., c'est le système $|\overline{C}''_0|$ que l'on rencontre le premier, c'est-à-dire que l'on a

$$\lambda'_2 + \mu'_2 < \lambda''_2 + \mu''_2.$$

Cette inégalité se traduit par

$$(t + 1)\lambda_1 + 2[(u_2 + 1)b_2 + 1] < (t + 1)\mu_1 + 2[(u_1 + 1)a_1 + 1]. \quad \text{(II)}$$

6. Un calcul simple montre que l'on a

$$p = (t + 1)\lambda_1\mu_1 + [(u_1 + 1)a_1 + 1]\lambda_1 + [(u_2 + 1)b_2 + 1]\mu_1.$$

Le nombre p étant premier, il en résulte que λ_1 *et* μ_1 *sont premiers entre eux*. On a en outre

$$\alpha = [(t+1)U_1 + (u_1+1)]\lambda_1 + [(u_2+1)b_2+1]U_1,$$
$$b_1 = [(t+1)m_1+1]\lambda_1 + m_1[(u_2+1)b_2+1].$$

Ces nombres sont également premiers entre eux.

De même,

$$\beta = [(t+1)U_2 + (u_2+1)]\mu_1 + [(u_1+1)a_1+1]U_2,$$
$$a_2 = [(t+1)m_2+1]\mu_1 + m_2[(u_1+1)a_1+1],$$

et ces nombres sont premiers entre eux.

Le système des sections hyperplanes $|\Gamma_0'|$ de la surface Φ_1 a le degré de $|\Gamma_0|$ diminué de $a_1+m_1+m_2+b_2$ unités. Par conséquent le point A doit absorber $p(a_1+m_1+m_2+b_2)$ unités dans l'intersection de deux courbes C_0'. On vérifie qu'il en est bien ainsi [1].

---

[1] Pour calculer le nombre des intersections de deux courbes C_0' absorbées par les points $(\alpha, \theta_\alpha, 1)$, $(\alpha, \theta_\alpha, 2)$, ..., P_α, on opère de la manière suivante :

Les points $(\alpha, \theta_\alpha - 1)$, (α, θ_α), $(\alpha, \theta_\alpha + 1)$ sont respectivement multiples d'ordres

$$\mu_1,\ a_1 + m_1(\eta_1+1),\ a_1$$

Posons, pour abréger, $x_1 = m_1(\eta_1+1)$. Pour trouver les points $(\alpha, \theta_\alpha, 1)$, ..., P_α, nous devons poser

$$\mu_1 - a_1 - x_1 = k_1 x_1 + x_2, \qquad x_1 = k_2 x_2 + x_3, \ \ldots,$$
$$x_{i-2} = k_{i-1} x_{i-1} + x_i, \qquad x_{i-1} = k_i x_i$$

et au point (α, θ_α) font suite k_1 points multiples d'ordre x_1, k_2 points multiples d'ordre x_2, ..., k_{i-1} points multiples d'ordre x_{i-1}, k_i points multiples d'ordre x_i dont le dernier est P_α (on a donc $x_i = m_1$).

Multiplions les relations précédentes respectivement par $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i$ et additionnons les membre à membre ; nous obtenons

$$(\mu_1 - a_1 - x_1)x_1 = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \ldots + k_{i-1} x_{i-1}^2 + k_i x_i^2.$$

On en conclut que le nombre des points d'intersection absorbés par $(\alpha, \theta_\alpha, 1)$, ..., P_α est égal à

$$m_1(\eta_1+1)[\mu_1 - a_1 - m_1(\eta_1+1)].$$

On calcule de la même manière le nombre

$$m_2(\eta_2+1)[\lambda_1 - b_2 - m_2(\eta_2+1)]$$

des points d'intersection de deux courbes C_0' absorbés en $(\beta, \theta_\beta, 1)$, ..., P_β.

7. Nous avons fait l'hypothèse que dans la suite des systèmes linéaires $|C_0''|$, $|\overline{C}_0''|$, ..., le système $|\overline{C}_0''|$ précédait le système $|\overline{\overline{C}}_0''|$, c'est-à-dire que l'on avait

$$\lambda_2' + \mu_2' < \lambda_2'' + \mu_2''.$$

Nous allons montrer que le système $|\overline{C}_0''|$ ne coïncide pas nécessairement avec le système $|C_0''|$, c'est-à-dire que l'on peut avoir

$$\lambda_2 + \mu_2 < \lambda_2' + \mu_2'.$$

En même temps, il sera prouvé que l'on peut avoir $l \geq 2$.

Les courbes C_0'' passent certainement a_1 fois par le point $(\alpha, \alpha - 1)$ et $m_1 - 1$ fois par le point P_α, car il leur correspond, sur Φ_1, les courbes Γ_0'' découpées par les hyperplans passant par le point A_1' commun aux courbes τ_α, τ_β. On aura donc $\mu_2 > \mu_2'$ et, de même, $\lambda_2 > \lambda_2''$. Il en résulte que sur une courbe C_0'', le point A est l'origine de deux branches superlinéaires, l'une passant par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., (α, x_1), $(\alpha, x_1 + 1)$ et par au moins un point uni de l'involution, distinct de $(\alpha, x_1 + 2)$, infiniment voisin de $(\alpha, x_1 + 1)$ et, peut-être, par d'autres points qui lui font suite, communs à toutes les courbes C_0''. Nous désignerons par R_α ce dernier point. L'autre branche superlinéaire passe par les points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ..., (β_1, x_2), $(\beta, x_2 + 1)$ et par un point au moins infiniment voisin de $(\beta, x_2 + 1)$, distinct de $(\beta, x_2 + 2)$, uni pour l'involution. La branche passe éventuellement par d'autres points infiniment voisins du précédent, communs à toutes les courbes C_0''. Nous désignerons par R_β le dernier de ces points. Les points R_α, R_β sont unis de première espèce pour l'involution.

Appelons Φ_2 la projection de la surface Φ_1 sur un hyperplan de l'espace ambiant. Sur Φ_2, les courbes σ_α, τ_ν, τ_β, σ_β ont respectivement les ordres a_1, $m_1 - 1$, $m_2 - 1$, b_2. Au domaine du point A_1' sur Φ_1 correspondent sur Φ_2 deux courbes ρ_α, ρ_β représentant les domaines des points R_α, R_β. Comme le point A_1' est en plus double pour la surface Φ_1, les courbes ρ_α, ρ_β sont des droites et les points R_α, R_β sont donc simples pour les courbes C_0'.

Nous supposerons $x_1 < \theta_\alpha$, $x_2 < \theta_\beta$.

Les courbes C_0'' passant $\lambda_2 + \mu_2$ fois par le point A, μ_2 fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., (α, x_1), $\mu_2' + y_1$ fois par $(\alpha, x_1 + 1)$,

μ_2' fois par les points $(a, x_1+2), \dots, (a, \theta_a - 1)$, $a_1 + (m_1 - 1)(\eta_1 + 1)$ fois par le point (a, θ_a), a_1 fois par les points $(a, \theta_a + 1), \dots, (a, a-1)$. En exprimant que la somme de ces multiplicités est égale à p, on trouve

$$(x_1+1)\,(\mu_2 - \mu_2') + y_1 = \lambda_2' - \lambda_2. \tag{1}$$

Observons que le point R_a devant être simple pour les courbes C_0'', $\mu_2 - \mu_2' - y_1$ et y_1 doivent être premiers entre eux. Il en résulte que $\mu_2 - \mu_2'$ et y_1 sont premiers entre eux et que par conséquent, $\lambda_2' - \lambda_2$ et $\mu_2 - \mu_2'$ sont premiers entre eux.

D'une manière analogue, on obtient la relation

$$(x_2+1)\,(\lambda_2 - \lambda_2'') + y_2 = \mu_2'' - \mu_2 \tag{2}$$

et les nombres $\lambda_2 - \lambda_2''$ et $\mu_2'' - \mu_2$ doivent être premiers entre eux.

Dans l'intersection de deux courbes C_0'', le point A doit absorber

$$p(a_1 + m_1 + m_2 + b_2 + 2)$$

points d'intersection. On obtient ainsi la relation

$$\begin{aligned} &[(t+1)\mu_1 + 2a_1(\mu_1+1) + 2](\lambda_2 - 2\lambda_1) + \\ &[(t+1)\lambda_1 + 2b_2(u_2+1) + 2](\mu_2 - 2\mu_1) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

8. La relation (3) nous conduit à poser

$$\lambda_2 = 2\lambda_1, \qquad \mu_2 = 2\mu_1.$$

On a, d'après les relations établies plus haut,

$$\lambda_2' = (t+2)\lambda_1 + b_2(u_2+1) + 1, \qquad \mu_2' = \mu_1 - [a_1(u_1+1) + 1],$$
$$\lambda_2'' = \lambda_1 - [b_2(u_2+1) + 1], \qquad \mu_2'' = (t+2)\mu_1 + a_1(u_1+1) + 1.$$

Pour que $\lambda_2 + \mu_2$ soit inférieure à $\lambda_2' + \mu_2'$, on doit avoir

$$\mu_1 < t\lambda_1 + b_2(u_2+1) + 1 - [a_1(u_1+1) + 1], \tag{4}$$

relation que nous supposerons vérifiée.

Les relations (1) et (2) deviennent

$$(x_1+1)[\mu_1 + a_1(u_1+1) + 1] + y_1 = t\lambda_1 + b_2(u_2+1) + 1, \tag{5}$$
$$(x_2+1)[\lambda_1 + b_2(u_2+1) + 1] + y_2 = t\mu_1 + a_1(u_1+1) + 1. \tag{6}$$

Observons que l'on peut écrire

$$p = \mu_1[t\lambda_1 + b_2(u_2 + 1) + 1] + \lambda_1[\mu_1 + a_1(u_1 + 1) + 1],$$

par conséquent $2\mu_1 - \mu_2'$ et $\lambda_2' - 2\lambda_1$ sont bien premiers entre eux. Il en résulte que $2\mu_1 - \mu_2'$ et y_1 sont premiers entre eux. De même, $2\lambda_1 - \lambda_2$ et y_2 sont premiers entre eux et les points R_α, R_β sont simples pour les courbes C_2''.

On vérifie en outre aisément que l'on a bien

$$x_1 + 1 < \theta_\alpha, \qquad x_2 + 1 < \theta_\beta.$$

On voit donc que le système $|C_0''|$ peut ne pas coïncider avec le système $|\overline{C}_0''|$ si l'inégalité (4) est satisfaite. On a alors $\lambda_2 = 2\lambda_1$, $\mu_2 = 2\mu_1$ et le point A_1' est double biplanaire pour la surface Φ_1, d'où $t \geq 2$.

Observons que l'inégalité (4) peut aussi s'écrire sous la forme

$$(m_1 + 1)[a_1(u_1 + 1) + 1] + a_1 < (tm_2 + 1)[b_2(u_2 + 1) + 1] + tb_2.$$

Liège, le 30 novembre 1953.