# Le théorème fondamental d'adjonction sur une variété algébrique à trois dimensions

par

Lucien GODEAUX

Candidat en sciences physiques et mathématiques de l'Université de Liège

---

M. Severi a donné récemment (¹) une démonstration nouvelle du théorème fondamental d'adjonction sur une surface algébrique et a prévu l'extension à une variété supérieure. Dans cette note, nous nous proposons de donner cette extension dans le cas d'une variété algébrique à trois dimensions.

1. — Soit V une variété algébrique à trois dimensions, irréductible, et supposée dépourvue de singularités.

Soient sur cette variété V, deux surfaces algébriques $F_1, F_2$ et une congruence rationnelle $\Gamma$ de courbes C telle que par

(¹) *Osservazioni varie di Geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varieta.* Atti del R. Ist. Veneto di Sc., Let. et Ar., 1905-1906, t. LXV, pp. 625-643 (par. 1, deux^e note).

un point générique de V passe une seule courbe de $\Gamma$. Démontrons que si les surfaces $F_1$, $F_2$ marquent sur une C générique des groupes de $m$ points équivalents, ces surfaces font partie d'un système linéaire $\infty^1$. Nous supposons les surfaces irréductibles et du même ordre.

Sur une courbe C quelconque, les deux groupes de $m$ points marqués par les surfaces $F_1$, $F_2$ définissent une série linéaire $g_m^1$ (par la définition même de deux groupes équivalents). Lorsque la C varie dans $\Gamma$, on obtient $\infty^2$ séries $g_m^1$ et par conséquent $\infty^3$ groupes de $m$ points. Les groupes de $m$ points sur une C dépendent rationnellement d'un paramètre, et comme les C de $\Gamma$ dépendent rationnellement de deux paramètres, il est possible d'établir une correspondance birationnelle entre ces groupes et les points d'un espace linéaire à trois dimensions $V^*$. Les courbes C de $\Gamma$ se transformeront en $\infty^2$ courbes $C^*$ rationnelles formant une congruence $\Gamma^*$ et les surfaces $F_1$, $F_2$ en deux surfaces $F_1^*$, $F_2^*$ unisécantes des courbes $C^*$. Il est évidemment possible de construire une surface $F_3^*$ de même ordre que $F_1^*$, $F_2^*$ et qui soit aussi unisécante des courbes $C^*$. A cette surface $F_3^*$, correspond sur V une surface $F_3$ qui marque sur les courbes C des groupes de $m$ points équivalents aux groupes marqués sur les mêmes courbes par les surfaces $F_1$, $F_2$. Sur chaque courbe C de $\Gamma$, on connaît donc trois groupes de $m$ points fixes, on peut donc établir une projectivité entre les groupes de $m$ points sur deux courbes C quelconques. Un groupe de $m$ points étant choisi sur une courbe C, les groupes qui lui correspondent dans une projectivité donnant le même rapport anharmonique sur les autres C engendrent une surface. Lorsque le groupe choisi décrit la série $g_m^1$ à laquelle il appartient, on obtient une série de surfaces contenant $F_1$, $F_2$ et $F_3$ ; de plus, cette série étant rapportée bi-univoquement aux groupes de la $g_m^1$ est rationnelle et $\infty^1$.

Théorème I. — *Sur une variété algébrique à trois dimensions* V, *deux surfaces marquant des groupes équivalents sur les courbes d'une congruence linéaire, appartiennent à une série linéaire* (¹).

2. — Considérons sur la variété V un système $\{F\}$ continu, $\infty^1$, de surfaces F irréductibles et un faisceau linéaire $|M|$ de surfaces M. Supposons que les surfaces F du système $\{F\}$ marquent des courbes linéairement équivalentes sur les surfaces M du faisceau $|M|$. Démontrons que dans ce cas, les surfaces F sont linéairement équivalentes, c'est-à-dire que le système continu $\{F\}$ est contenu dans un système linéaire.

Il est au moins possible de trouver sur chaque surface M du faisceau $|M|$ un faisceau linéaire $|C|$ de courbes C. Lorsque M varie, on a alors une congruence linéaire de courbes C. Les surfaces F marquant sur les M des courbes linéairement équivalentes, elles marquent sur les courbes C des groupes de points équivalents. En vertu du théorème I, deux surfaces quelconques F sont linéairement équivalentes, et par conséquent le système $\{F\}$ est contenu dans un système linéaire.

Théorème II. — *Sur une variété algébrique à trois dimensions, si un système continu,* $\infty^1$, *de surfaces irréductibles marque sur les surfaces d'un faisceau linéaire des courbes linéairement équivalentes, ce système est contenu dans un système linéaire.*

Ce théorème a été énoncé sans démonstration par M. Severi (²).

(¹) Dans le cas des systèmes de courbes tracés sur une surface, M. Severi a donné un théorème analogue dans son beau mémoire : *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche*, § 6, Annali di Matematica, 1905, (3), XII, pp. 55-79.

(²) *Osservazioni*, § 6.

3. — Soit $|F|$ un système linéaire irréductible, $\infty^r$ ($r \geqslant 3$), privé de points de base et ne possédant pas $\infty^{r-1}$ surfaces décomposables. Les surfaces jacobiennes $F_j$ des systèmes linéaires triplement infinis de surfaces F contenus dans $|F|$ forment un système linéaire, car elles découpent sur une F générique les jacobiennes du système linéaire $\infty^{r-1}$ marqué par les autres F, et ces jacobiennes sont algébriquement équivalentes.

Définition. — *On appelle surfaces adjointes* F′ *aux surfaces* F, *les surfaces vérifiant la relation :*

$$|F'| = |F_j - 3F| \quad (1)$$

(1) [1]

Représentons d'une façon générale par (K L) l'intersection de deux surfaces K, L, tracées sur V.

La relation (1) donne :

$$(FF') \equiv (FF_j) - 3(FF).$$

Mais si $\varphi$ représente l'ensemble des courbes exceptionnelles d'une surface F, $\theta$ le système canonique, on a [2] :

$$(FF_j) \equiv \theta + \varphi + 3(FF).$$

Par conséquent :

$$(FF') \equiv \theta + \varphi.$$

C'est-à-dire que le système adjoint à un système linéaire $|F|$ découpe, sur une surface quelconque de ce système,

(1) Pannelli. *Sopra alcuni caratteri di una varieta algebrica a tre dimensioni*. Rend. della R. Accad. dei Lincei, 1906, 1er semestre, (5)-xv, pp. 483-489.

(2) Enriques. *Intorno ai fondamenti della Geometria sopra le superficie algebriche*. Atti della R. Accad. di Torino, 1901, xxxvii, § 24.

le groupe canonique augmenté des courbes exceptionnelles (supposées en nombre limité).

Passons au théorème fondamental d'adjonction. Soit $|G|$ un système de surfaces analogue à $|F|$. Nous allons démontrer que l'on a :

$$|F + G'| = |F' + G|.$$

Considérons un faisceau de $|F|$ et un réseau de $|G|$. Le lieu des points de contact des surfaces F du faisceau avec les surfaces G du réseau est une surface T passant par les éléments de base du faisceau et du réseau.

On a évidemment :

$$(TF) \equiv (FF) + (FG)_j.$$

Mais :

$$(FG)_j \equiv (FF') + 3\,(FG).$$

donc :

$$(TF) \equiv (FF) + (FF') + 3\,(FG)$$

et en vertu du théorème II :

$$T \equiv F + F' + 3\,G \tag{2}$$

La courbe (TG) est le lieu des contacts des courbes de deux faisceaux (FG), (GG). En se rappelant qu'un groupe de la série caractéristique d'un système linéaire est algébriquement équivalent à un groupe de la série canonique diminué d'un groupe de points appartenant au système canonique de la surface, on voit que :

$$(TG) \equiv (GG') + 2\,(GG) + 2\,(GF).$$

Pour le théorème II :

$$(3) \qquad T \equiv G' + 2G + 2F.$$

Des égalités symboliques (2) et (3) on déduit :

$$| F + F' + 3G | = | G' + 2G + 2F |$$

et enfin :

$$| F' + G | = | F + G' |$$

THÉORÈME III. — *Si* $| F' |$, $| G' |$ *sont les systèmes adjoints respectivement de deux systèmes linéaires* $| F |$, $| G |$, *on a la relation :*

$$| F + G' | = | G + F' | .$$

Si l'opération est possible, on pourra former le système canonique :

$$| \Phi_1 | = | F' - F | .$$

Le nombre de surfaces $\Phi_1$ linéairement indépendantes donnera le genre géométrique $P_g$ de la variété V.

4. — Indiquons par $F''$ les surfaces adjointes aux surfaces $F'$, par $G''$ les surfaces adjointes aux surfaces $G'$ ; il est évident que les surfaces $F''$, $G''$, forment des systèmes linéaires $| F'' |$, $| G'' |$.

Puisque $| F'' |$ est l'adjoint de $| F' |$, on a :

$$F' + G' \equiv F'' + G.$$

De même, puisque $| G'' |$ est l'adjoint de $| G' |$,

$$G' + F' \equiv G'' + F.$$

Par conséquent :

$$| F'' + G | = | G'' + F | .$$

Si l'on désigne par système bi-adjoint de $| F |$, le système $| F'' |$, on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Si* $| F'' |$, $| G'' |$ *sont les systèmes bi-adjoints respectivement de deux systèmes linéaires* $| F |$, $| G |$, *on a la relation :*

$$| F'' + G | = | G'' + F | .$$

Lorsque cela est possible, on peut former le système bi-canonique :

$$| \Phi_2 | = | F'' - F | .$$

Le nombre de surfaces $\Phi_2$ linéairement indépendantes sera appelé, comme dans le cas des surfaces, le bi-genre $P_2$ de la variété V.

De la même manière, on arriverait au $i$-genre $P_i$. Pour $i = 1$, on a $P_1 = P_g$.

Liège, 9 mars 1909.