Sur les surfaces qui représentent les couples de points d'une courbe hyperelliptique (*); par Lucien Godeaux, à Liége.

MM. De Franchis et Severi ont étudié les surfaces représentant biunivoquement et sans exception les couples de points d'une courbe algébrique quelconque (**). On trouvera des renseignements bibliographiques complets dans le beau mémoire de M. Severi : *Sulle corrispondenze, etc.*

Dans la note suivante, j'expose quelques théorèmes auxquels je suis parvenu concernant la surface représentant les couples de points d'une courbe hyperelliptique. J'étais parvenu à quelques résultats concernant les courbes tracées sur la surface étudiée dans ce travail, mais comme ils sont communs aux surfaces obtenues en partant d'une courbe quelconque, j'ai préféré garder ces résultats pour un mémoire ultérieur sur ces dernières surfaces.

1. — Soit Λ une courbe hyperelliptique de genre p dont chaque groupe de la série canonique se compose donc

(*) Extrait des *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), n° 3, pp. 180-184, 1910.

(**) De Franchis, *Sulle varieta* ∞^2 *delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica.* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1903, t. XVII, pp. 104-121.) — Severi, *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica.* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1902-1903, t. XXXVIII, pp. 185-200.) — *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica et sopra certe classi di superficie.* (Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1903, s. (2), t. LIV, pp. 1-49.)

de $p - 1$ groupes arbitraires d'une série linéaire g_2^1. Soit F une surface qui représente biunivoquement et sans exception les couples de points non ordonnés de la courbe Λ.

Aux groupes de la g_2^1 de Λ correspondent sur F les points d'une courbe unicursale A, qui est évidemment une courbe exceptionnelle (de première espèce).

Aux couples de points de Λ possédant un point fixe correspondent sur F les points d'une courbe C birationnellement identique à Λ. Lorsque le point fixe décrit Λ, la courbe C varie dans un système continu $\{C\}$ simplement infini, de degré un et d'indice deux. L'enveloppe de ce système est constituée par une courbe Γ dont les points correspondent aux couples de Λ formés de deux points confondus.

Les courbes C rencontrent A en un seul point et la courbe Γ en $2p + 2$ points qui correspondent aux $2p + 2$ points de Weierstrasz de Λ (points doubles de la g_2^1).

2. — Cherchons à déterminer la série linéaire g_2^1 appartenant à une courbe C quelconque. Soient P un point de la courbe, Λ, P_1, P_2 deux autres points de la même courbe mais formant un groupe de la g_2^1. Nous allons construire la g_2^1 appartenant à la courbe C de F dont les points correspondent aux couples de Λ ayant en commun le point fixe P. Aux couples de points (PP_1), (PP_2) correspondent sur C les points d'un groupe de la g_2^1 cherchée. Or les courbes C_1, C_2 de $\{C\}$, formées avec les couples de Λ contenant respectivement P_1, P_2, se rencontrent sur la courbe A ; donc :

Les couples de courbes C *passant par un même point de la courbe* A *marquent sur une courbe* C *quelconque des* *groupes de la série* g_2^1 *appartenant à cette dernière courbe.*

Il existe $2p + 2$ points de A par chacun desquels passe seulement une courbe C : ce sont les points situés sur la courbe Γ; donc :

Les courbes C *qui passent par les points communs aux courbes* A *et* Γ *découpent sur une courbe* C *quelconque les points doubles de la* g_2^1 *appartenant à cette dernière courbe.*

Le même procédé fournit aussi la g_2^1 de la courbe Γ.

3. — On peut voir immédiatement que la surface F est irrégulière. En effet : A toute correspondance symétrique entre les points de la courbe A faisons correspondre sur F la courbe représentative des couples de points conjugués pour la correspondance. Le nombre des coïncidences pour la correspondance sera égal au nombre de points communs à la courbe Γ et à la courbe représentative de cette correspondance. Cela étant, considérons sur A une série linéaire d'ordre n et de rang un, mais non complète (donc $n > 2$); cette série définit une correspondance symétrique d'ordre $n - 1$, de valeur (*) un et possédant $2(n + p - 1)$ points unis. Par conséquent, la courbe D représentative de la g_n^1 sur F rencontrera chaque C en $n - 1$ points et la courbe Γ en $2(n + p - 1)$ points. La série g_n^1 n'étant pas complète, la courbe D n'est pas unique, et d'après un théorème de M. Rosati (**), comme on a

$$2(n + p - 1) < 2(n - 1)(p + 1),$$

(*) Valenza, Werthigkeit.

(**) *Un osservazione sugli inviluppi dei sistemi algebrici di curve appartenenti ad una superficie algebrica.* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1° sem. 1907, s. 5, t. XVI, pp. 952-956.)

les courbes C ne sont certainement pas contenues dans un système linéaire, donc la surface F est irrégulière.

4. — Dans un travail récent, M. L. Remy a étudié une surface dont les points sont liés par une correspondance (1, 2) avec les couples de points d'une courbe hyperelliptique (*). Cette correspondance est telle que si P_1 P_2, Q_1 Q_2 sont deux couples de points de la courbe conjugués à un même point de la surface, les couples P_1 Q_1, P_2 Q_2 sont des groupes de la série g_2^1 appartenant à la courbe. Une telle surface est évidemment l'image d'une involution d'ordre deux sur la surface F. Cette involution, que nous désignerons par Φ, se construit facilement.

Soient P le point de F correspondant au couple de points (P_1, P_2) de Λ, Q le point correspondant au couple (Q_1, Q_2). Si (P_1, Q_1), (P_2, Q_2) sont des groupes de la g_1^2 de Λ, les points P, Q forment un groupe de l'involution Φ. Désignons par C_1, C_2 les courbes du système $\{C\}$ passant par le point P ; l'une de ces courbes C_1 est l'image des couples de points de Λ dont P_1 fait partie; l'autre courbe C_2 est formée de la même manière avec P_2. Soient de même C_1', C_2' les courbes du système $\{C\}$ passant par Q. Les points P_1, Q_1 appartenant à un même groupe de la g_2^1, les courbes C_1, C_1' se rencontrent en un point de A. Il en est de même des courbes C_2, C_2'; donc :

Les groupes de l'involution Φ sont formés par les inter-

(*) *Sur le nombre des intégrales doubles de seconde espèce de certaines surfaces algébriques.* (Bulletin de la Société mathématique de France, 1909, t. XXXVII, pp. 3-11.)

sections deux à deux des couples de courbes C *issues des points de* A.

La courbe de coïncidence de l'involution Φ est évidemment composée de la courbe A et des $2p + 2$ courbes C passant par les points communs aux courbes A et Γ (*). Le genre de la courbe de coïncidence est donc égal à $4p^2 + 4p - 1$.

Liége, 26 juin 1909.

(*) Dans l'étude de M. Remy, la courbe est considérée comme fondamentale.

Hayez. — Imprimeur des Académies royales, Bruxelles