GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME

DE

François DERUYTS

PAR

LUCIEN GODEAUX
Etudiant en Sciences physiques et mathématiques
à l'Université de Liège

Extrait des Mémoires et Publications
de la Société des Sciences, des Arts et des Lettres
du Hainaut
VII^e série, tome I, 61^e volume.

MONS
IMPRIMERIE DEQUESNE-MASQUILLIER & FILS
1909

GÉNÉRALISATION

D'UN THÉORÈME

DE

FRANÇOIS DERUYTS

PAR

Lucien GODEAUX

Étudiant en sciences physiques et mathématiques à l'Université de Liège.

Dans son beau « *Mémoire sur la théorie de l'involution et de l'homographie unicursale* »[1], François Deruyts a démontré le théorème suivant :

Si un triangle se déforme de telle manière que deux de ses côtés s'appuient sur deux couples de droites fixes, tandis que le troisième côté passe par un point fixe, le sommet opposé décrira une surface cubique.

J'ai rencontré moi-même plusieurs générations de surfaces qui offrent de l'analogie avec le théorème de François

[1] Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège, 1890, (2), XVII. — Voir aussi : *Sur un procédé de génération de la surface cubique.* Bull. de l'Acad. R. de Belgique, 1891, (3), XXII, et *Sur la configuration formée par les quadrisécantes d'une courbe gauche rationnelle du sixième ordre.* Id., 1898, (3), XXXV.

Deruyts [1], il importait donc de trouver un théorème général englobant tous les autres comme cas particuliers. Je suis arrivé à ce théorème il y a un peu plus d'un an [2] et la publication de mes résultats a été retardée pour permettre aux notes citées précédemment de paraître.

1. — Soient G_1, ..., G_k k congruences formées de courbes gauches respectivement d'ordres ρ_1, ... ρ_k. Désignons par m_1, ... m_k, les ordres respectifs des congruences G_1, ... G_k, c'est-à-dire le nombre de courbes de chacune des congruences qui passent par un point générique de l'espace, et par n_1 ....., n_k les classes respectives des mêmes congruences. Nous supposons que les courbes de la congruence G_i qui s'appuient en un point sur une courbe d'ordre ν_i (plane ou gauche) engendrent une surface d'ordre σ_i $(i = 1, ..., k)$.

Soient encore k surfaces S_1, ..., S_k respectivement d'ordres μ_1, ..., μ_k. Sur chacune de ces surfaces est tracé un système continu, simplement infini de courbes algébriques. Ainsi, sur la surface S_i, on donne un système continu $\{C_i\}$ d'indice φ_i de courbes C_i d'ordre ν_i. Les courbes des systèmes $\{C_1\}$, ..., $\{C_k\}$ sont liées par une relation H, telle que $k - 1$ courbes C_1, ..., C_{j-1}, C_{j+1}, ..., C_k étant choisies, λ_j courbes C_j se trouvent déterminées. En d'autres termes, les systèmes $\{C_1\}$, ... $\{C_k\}$ sont liés par une relation $(\lambda_1, ..., \lambda_k)$.

[1] *Sur une surface du quatrième ordre.* Nouvelles Annales de Mathématiques, 1907, (4), VII. — *Notes de géométrie synthétique.* Mémoires de la Société des Sciences du Hainaut, 1907, (6), IX. — *Sur une congruence* (2, 1) *de coniques.* Id., 1908, (6), X. — *Notes de Géométrie* et *Etudes de Géométrie synthétique.* Mémoires de la Société R. des Sciences de Liège, 1908, (3), VIII. — *Sur une congruence linéo-linéaire de cubiques gauches.* Bull. de l'Acad. R. de Belgique, 1908. — *Sur un mode de génération de la cubique gauche.* Archiv. der Math. und Phys., 1908, (3), XIII. — *Notes de Géométrie synthétique.* Mathesis, 1909, (3), IX.

[2] Une première rédaction est datée du 11 février 1908.

Proposons-nous de rechercher le lieu d'un point X tel que les courbes des congruences G_1, ..., G_k passant par ce point rencontrent respectivement les surfaces S_1, ..., S_k sur des courbes C_1, ..., C_k qui vérifient la relation H.

2. — Soient (X_1), ..., (X_k), k ponctuelles ayant pour support commun une droite générique x de l'espace.

Par un point X_i de la ponctuelle (X_i) passent m_i courbes de la congruence G_i. Ces courbes marquent sur la surface S_i un groupe de $m_i\, \rho_i\, \mu_i$ points. Il y a $\varphi_i\, \mu_i\, m_i\, \rho_i$ courbes C_i du système $\{C_i\}$ qui passent par ces points.

Faisons varier i de 1 à $j - 1$ et de $j + 1$ à k. Dans les $k - 1$ groupes de courbes obtenues de cette façon sur les surfaces S_1, ..., S_{j-1}, S_{j+1}, ..., S_k prenons $k - 1$ courbes dont deux ne sont pas tracées sur la même surface. Cela est possible de :

$$\prod_{i=1}^{i=j-1} \varphi_i\, m_i\, \rho_i\, \mu_i \prod_{i=j+1}^{i=K} \varphi_i\, m_i\, \rho_i\, \mu_i$$

$$= \frac{1}{\varphi_j\, m_j\, \rho_j\, \mu_j} \prod_{i=1}^{K} \varphi_i\, m_i\, \rho_i\, \mu_i \,.$$

façons.

A chacun de ces groupes correspondent sur la surface S_j λ_j courbes C_j. Au total, on a sur la surface S_j

$$= \frac{\lambda_j}{\varphi_j\, m_j\, \rho_j\, \mu_j} \prod_{1}^{K} \varphi_i\, m_i\, \rho_i\, \mu_i$$

courbes C_j.

Les courbes de la congruence G_j qui s'appuient sur une de ces courbes engendrent une surface σ_j. Cette surface marque sur la droite x un nombre σ_j de points X_j appartenant à la ponctuelle (X_j). Lorsque l'on a employé toutes les courbes tracées sur la surface S_j, on a des points X_j en nombre

$$\frac{\lambda_j \sigma_j}{\varphi_j m_j \rho_i \mu_j} \prod_1^K \varphi_i m_i \rho_i \mu_i$$

Lorsqu'on fait varier j de 1 à k, on voit que les k ponctuelles (X_1), ..., (X_k) sont liées par une correspondance

$$\left(\frac{\lambda_j \sigma_j}{\varphi_j m_j \rho_j \mu_j} \prod_1^K \varphi_i m_i \rho_i \mu_i \right) \quad (j = 1, \ldots\ldots, k).$$

D'après le principe de Chasles-Deruyts, il y a :

$$\prod_{i=1}^{i=K} \varphi_i m_i \rho_i \mu_i \sum_{j=1}^{j=K} \frac{\lambda_j \sigma_j}{\varphi_j m_j \rho_j \mu_j}$$

coïncidences.

Une de celles-ci étant précisément un point du lieu cherché, on a le théorème :

Le lieu d'un point par lequel passent des courbes d'ordres $\rho_1, \ldots\ldots, \rho_i, \ldots\ldots, \rho_k$, *appartenant respectivement à des congruences* $G_1, \ldots\ldots, G_i, \ldots\ldots, G_k$, *d'ordres* $m_1, \ldots\ldots, m_i, \ldots\ldots, m_k$ *et rencontrant* k *surfaces* $S_1, \ldots\ldots, S_i, \ldots\ldots, S_k$. *en des points situés sur des courbes d'ordres* $\nu_1, \ldots\ldots, \nu_i, \ldots\ldots, \nu_k$, *formant des systèmes simplement infinis d'indices* $\varphi_1, \ldots\ldots, \varphi_i, \ldots\ldots, \varphi_k$, *liés par une correspondance* $(\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_i, \ldots\ldots, \lambda_k)$, *est une surface* M *d'ordre*

$$\prod_{i=1}^{K} \varphi_i m_i \rho_i \mu_i \sum_{j=1}^{K} \frac{\lambda_j \sigma_j}{\varphi_j m_j \rho_j \mu_j},$$

les courbes des congruences $G_1, \ldots\ldots, G_i, \ldots\ldots, G_k$ *s'ap-*

puyant sur des courbes d'ordres $\nu_1, \ldots\ldots, \nu_i, \ldots\ldots, \nu_k$, *engendrant des surfaces respectivement d'ordres* $\sigma_1, \ldots\ldots \sigma_i, \ldots\ldots, \sigma_k$.

3. — Soit A_j un point-base du système $\{C_j\}$ et supposons de plus que toutes les courbes C_j ont en ce point une multiplicité d'ordre η_j.

Le point A_j aura sur la surface M une certaine multiplicité que l'on pourra calculer en faisant passer la droite x par ce point.

Si l'on choisit les points $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots\ldots, X_k$ et que l'on effectue les mêmes constructions que précédemment, on déterminera sur la surface S_j

$$\frac{\lambda_j}{\varphi_j \; m_j \; \rho_j \; \mu_j} \prod_1^K \varphi_i \; m_i \; \rho_i \; \mu_i$$

courbes C_j.

La surface engendrée par les courbes de G_j s'appuyant sur une courbe C_j, possède évidemment au point A_j, un point multiple d'ordre $\eta_j \; m_j$. Les surfaces engendrées par les courbes de G_j s'appuyant sur les courbes C_j, construites sur S_j rencontrent x, en dehors du point A_j, en

$$\frac{\lambda_j}{\varphi_j \; m_j \; \rho_j \; \mu_j} \prod_1^K \varphi_j \; m_j \; \rho_i \; \mu_i \; (\sigma_j - \eta_j \; m_j).$$

On en conclut que :

S'il existe sur la surface S_j *un point multiple d'ordre* η_j *pour toutes les courbes* C_j *tracées sur cette surface, ce point est multiple d'ordre*

$$\frac{\lambda_j \; \eta_j}{\varphi_j \; \rho_j \; \mu_j} \prod_1^K \varphi_i \; m_i \; \rho_i \; \mu_i$$

sur la surface M.

4. — Soit B_j un point singulier d'ordre p_j de la congruence G_j, c'est-à-dire que par le point B_j il passe une simple infinité de courbes de G_j et que ces courbes engendrent une surface d'ordre p_j.

Par le point B_j menons les courbes des congruences $G_1, \ldots, G_{j-1}, G_{j+1}, \ldots, G_k$ et effectuons les mêmes constructions que tantôt, de manière à obtenir sur S_j

$$\frac{\lambda_j}{\varphi_j\, m_j\, \rho_j\, \mu_j}\ \Pi\, \varphi\, m\, \rho\, \mu$$

courbes C_j.

Chacune de ces courbes rencontre la surface formée par les courbes de G_j passant par B_j en $p_j\, \nu_j$ points. Chacun de ces points détermine une seule courbe de la congruence passant par B_j, donc :

Si une congruence G_j *possède un point singulier d'ordre* p_j *ce point est multiple d'ordre*

$$\frac{\lambda_j\, p_j\, \nu_j}{\varphi_j\, m_j\, \rho_j\, \mu_j}\ \Pi\, \varphi\, m\, \rho\, \mu$$

sur la surface M.

5. — Supposons que la congruence G_j possède un point fondamental D_j, c'est-à-dire un point par lequel passent toutes les courbes de la congruence.

Deux cas peuvent se présenter : 1°, $\rho_j \geqslant 2$; 2°, $\rho_j = 1$.

Supposons en premier lieu $\rho_j \geqslant 2$.

Les courbes de G_j s'appuyant sur la courbe C_j possèdent au point D_j un point d'un certain ordre q_j de multiplicité.

Faisons passer la droite x du numéro deux par le point D_j. Aux points $X_1, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots X_k$ de

$k - 1$ ponctuelles supportées par cette droite correspondent

$$\frac{\lambda_j (\sigma_j - q_j)}{\varphi_j \, m_j \, \rho_j \, \mu_j} \Pi \varphi \, m \, \rho \, \mu$$

points X_j.

De là :

Si la congruence G_j *possède un point fondamental multiple d'ordre* q_j *sur les surfaces d'ordre* σ_j *engendrées par les courbes de la congruence* G_j *s'appuyant sur une courbe d'ordre* ν_j, *ce point est multiple d'ordre*

$$\frac{q_j}{\varphi_j \, m_j \, \rho_j \, \mu_j} \Pi \varphi \, m \, \rho \, \mu$$

sur la surface M.

Les choses changent lorsque la congruence G_j est une gerbe de rayons ($\rho_j = 1$). Alors toute droite passant par le point D_j appartient à la congruence et si x est une de ces droites, toute coïncidence des ponctuelles $(X\ )$, ... (X_{j-1}), (X_{j+1}), ..., (X_k) est un point de la surface M, et dans ce cas, le point D_j est multiple d'ordre

$$\frac{\lambda_j \, \nu_j}{\varphi_j \, \mu_j} \Pi \varphi \, m \, \rho \, \mu$$

sur la surface M.

6. — Soit E un point commun aux surfaces S_j, S_{j+1}. Supposons que par ce point passent ψ ($\psi \leqslant \varphi_j$, $\psi \leqslant \varphi_{j+1}$) couples de courbes C_j, C_{j+1} tels que, associés à $k - 2$ courbes C_1, C_2, ..., C_{j-1}, C_{j+2}, ..., C_k quelconques, la relation H soit vérifiée.

Supposons que la droite x passe par le point E. Comme la courbe C_j est multiple d'ordre m_j sur la surface engendrée par les courbes de G_j s'appuyant sur cette courbe, le point E absorde

$$m_j \, m_{j+1} \, \psi$$

coïncidences dans la correspondance entre les ponctuelles, donc :

Si par un point il passe ψ *couples de courbes* C_j, C_{j+1} *pouvant s'associer avec des courbes* C_1, C_2, ..., C_{j-1}, C_{j+2}, ..., C_k *quelconques pour vérifier la relation* H, *ce point est multiple d'ordre*

$$m_j \, m_{j+1} \, \psi$$

sur la surface M.

7. — Proposons-nous de rechercher les générations de surfaces cubiques que l'on peut obtenir avec notre procédé, le § 6 étant supposé non applicable.

k peut évidemment prendre les valeurs 2 et 3.

Supposons $k = 2$. L'ordre de la surface M devant être trois, on aura :

$$\lambda_1 \sigma_1 \varphi_2 m_2 \rho_2 \mu_2 + \lambda_2 \sigma_2 \varphi_1 m_1 \rho_1 \mu_1 = 3.$$

Les inconnues entrant dans cette équation doivent être des entiers positifs, donc cette équation se décompose en deux autres

$$\lambda_1 \sigma_1 \varphi_2 m_2 \rho_2 \mu_2 = 1,$$

$$\lambda_2 \sigma_2 \varphi_1 m_1 \rho_1 \mu_1 = 2.$$

La première donne :

$$\lambda_1 = \sigma_1 = \varphi_2 = m_2 = \rho_2 = \mu_2 = 1.$$

La surface d'ordre $\sigma_1 = 1$ est engendrée par des courbes d'ordre ρ_1 s'appuyant sur une courbe d'ordre ν_1, donc $\rho_1 = 1$ et

$$\sigma_1 = \nu_1 (m_1 + n_1),$$

d'où :

$$\nu_1 = m_1 = 1, n_1 = 0.$$

Puisque $\rho_2 = 1$, on a :

$$\sigma_2 = \nu_2 (1 + n_2).$$

On a donc :

$$\lambda_2 \nu_2 (1 + n_2) \varphi_1 \mu_1 = 2,$$

équation qui se décompose en deux autres de deux manières :

$$\text{I.} \quad \begin{cases} \lambda_2 \nu_2 \varphi_1 \mu_1 = 1 \\ \lambda_2 \nu_2 n_2 \varphi_1 \mu_1 = 1, \end{cases}$$

ou, si $n_2 = 0$,

$$\text{II.} \qquad \lambda_2 \nu_2 \varphi_1 \mu_1 = 2.$$

De I on tire :

$$\lambda_2 = \nu_2 = \varphi_1 = \mu_1 = n_2 = 1.$$

De la seconde, on tire un des quatre systèmes :

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= 2, & \nu_2 &= \varphi_1 = \mu_1 = 1 ; \\ \nu_2 &= 2, & \lambda_2 &= \varphi_1 = \mu_1 = 1 ; \\ \varphi_1 &= 2, & \lambda_2 &= \nu_2 = \mu_1 = 1 ; \\ \mu_1 &= 2, & \lambda_2 &= \nu_2 = \varphi_1 = 1. \end{aligned}$$

Supposons que $k = 3$.

L'équation :

$$\lambda_1 \sigma_1 \varphi_2 \varphi_3 m_2 m_3 \rho_2 \rho_3 \mu_2 \mu_3 + \ldots.. = 3$$

se décompose en trois autres :

$$\lambda_1 \sigma_2 \varphi_2 \varphi_3 m_2 m_3 \rho_2 \rho_3 \mu_2 \mu_3 = 1, \quad \text{etc.}$$

On en tire :

$$\lambda_1 = \sigma_1 = \ldots\ldots = 1,$$
$$n_1 = n_2 = n_3 = 0.$$

On trouve donc au total six générations de surfaces cubiques. Nous nous contenterons d'énoncer l'une de celles-ci :

Si les côtés d'un angle variable passe par deux points fixes et rencontrent chacun un plan, le premier en un point d'une droite d'un faisceau, le second en un point d'une conique d'un faisceau homographique au premier, le sommet de l'angle décrira une surface cubique. nt

Morlanwelz, 9 avril 1909.