SUR L'INVARIANT DE ZEUTHEN-SEGRE (*);
par Lucien Godeaux, étudiant en mathématiques à l'Université de Liége.

Dans ce travail, j'étends un théorème donné par MM. Castelnuovo et Enriques pour les surfaces aux variétés à trois dimensions, puis je recherche le genre des courbes de contact des éléments de deux systèmes continus ∞^1 de courbes sur une surface algébrique.

1. — M. Segre a donné le théorème suivant (**) :

Étant donné sur une surface algébrique F *un faisceau homaloïde de courbes de genre* p, *doté de* σ *points de base et de* δ *courbes possédant un point double, le nombre*

$$I = \delta - \sigma - 4p$$

est indépendant du faisceau choisi.

MM. Zeuthen et Noether avaient rencontré cet invariant I dans des travaux antérieurs au mémoire de M. Segre, en considérant le système des sections planes d'une surface située dans un espace à trois dimensions (***).

Dans un important mémoire (IV), MM. Castelnuovo et Enriques ont donné une nouvelle expression de l'invariant I de Zeuthen-Segre, à savoir :

Si l'on donne sur une surface F *un faisceau de genre* ρ

(*) Extrait des *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), n° 3, pp. 336-341, 1909.

(**) *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varieta superiori algebriche.* (ATTI DI TORINO, 1896, t. XXXI, pp. 485-501.)

(***) SEGRE, *loc. cit.*

(IV) *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche.* (ANNALI DI MATEMATICA, 1901, 3e sér., t. VI, pp. 165-225.)

formé par des courbes de genre p *et doté de* δ *courbes possédant un point double, l'invariant de Zeuthen-Segre a pour expression :*

$$I = \delta + 4(\rho - 1)(p - 1) - 4.$$

L'extension du premier théorème aux variétés à trois dimensions a été faite par M. Segre dans son travail cité; dans ce cas, on a le théorème :

Étant donné sur une variété V *à trois dimensions un faisceau linéaire de surfaces dont l'invariant Zeuthen-Segre est* I, *doté d'une courbe de base de genre* p *et de* Δ *surfaces possédant un point double, l'expression*

$$\Pi = \Delta - 2I - 2p$$

ne dépend pas du faisceau considéré.

Nous allons rechercher l'expression de Π lorsque l'on part d'un faisceau irrationnel.

2. — Soient donnés sur une variété algébrique V à trois dimensions un faisceau |F| de genre ρ formé par des surfaces dont l'invariant de Zeuthen-Segre est I, doté de Δ surfaces possédant un point double, et un faisceau linéaire |F′| formé par des surfaces F′ de caractère I′, possédant une courbe base C de genre p et Δ' surfaces à point double.

Les surfaces F′ marquent sur une surface F fixe un faisceau rationnel de courbes; le nombre δ de ces F′ qui touchent la F est donné par la formule

$$\delta = I + n + 4\pi,$$

n étant le nombre de points communs à la surface F et à la courbe C, π le genre de la courbe commune à deux surfaces F, F′.

Lorsque la surface F varie dans $|F|$, ces δ points décrivent une courbe T de genre τ dont on connaît par conséquent une involution irrationnelle d'ordre δ et de genre ρ. D'après une formule classique due à M. Zeuthen, cette involution possède des points doubles en nombre

$$2(\tau - 1) - 2\delta(\rho - 1).$$

Ces points doubles proviennent des $\varkappa$ couples de surfaces F, F′ qui ont un contact supérieur, ou des Δ surfaces F possédant un point double, ou des surfaces F qui osculent la courbe c; donc

$$2(\tau - 1) - 2\delta(\rho - 1) = \Delta + \varkappa + 2(p - 1) - 2n(\rho - 1)$$

ou, en remplaçant δ par sa valeur,

$$\Delta + 2(\rho - 1)\mathrm{I} + 2(p - 1) = 2(\tau - 1) - 8(\rho - 1)\pi - \varkappa. \quad (1)$$

Les F marquent sur une F′ quelconque un faisceau irrationnel, et le nombre δ' des surfaces F qui touchent la F′ est donné par le théorème de Castelnuovo-Enriques rappelé plus haut :

$$\delta' = \mathrm{I}' - 4(\rho - 1)(\pi - 1) + 4.$$

Lorsque la F′ décrit le faisceau $|F'|$, ces δ' points décrivent la courbe T dont on connaît maintenant une série linéaire. Le nombre de points doubles de cette série provient des $\varkappa$ couples de surfaces F, F′ qui s'osculent et des Δ' surfaces F′ possédant un point double; donc

$$2(\delta' + \tau - 1) = \Delta' + \varkappa.$$

En remplaçant δ' par sa valeur, cette formule s'écrit :

$$\Delta' - 2\mathrm{I}' = 2(\tau - 1) - 8(\rho - 1)(\pi - 1) + 8 - \varkappa. \tag{2}$$

Par soustraction de (1) de (2), on obtient

$$\Delta + 2(\rho - 1)(\mathrm{I} + 4) + 6 = \Delta' - 2\mathrm{I}' - 2p.$$

Or l'invariant de Zeuthen-Segre de V est

$$\Pi = \Delta' - 2\mathrm{I}' - 2p;$$

donc : *Étant donné sur une variété algébrique* V *à trois dimensions un faisceau de genre* ρ *formé par des surfaces d'invariant de Zeuthen-Segre* I *et doté de* Δ *surfaces possédant un point double, l'invariant de Zeuthen-Segre de* V *a pour expression :*

$$\Pi = \Delta + 2(\rho - 1)(\mathrm{I} + 4) + 6.$$

3. — Soit F une surface régulière ($P_a = P_g$). Sur cette surface on donne deux systèmes continus ∞^1 $\{C\}$, $\{C'\}$ respectivement d'indices ν, ν', formés par des courbes de genres p, p' et dotés de σ, σ' points de base. Il y a ∞^1 couples de courbes C, C' qui se touchent; les points de contact décrivent une courbe T dont nous allons rechercher le genre τ dans le cas de $\nu \gtrless \nu'$.

Rappelons que, par un théorème de M. Enriques (*), les courbes tracées sur une surface régulière se distribuent

(*) *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari.* (Rendiconto delle sessioni della r. Accad. di Bologna, 1904-1905, t. IX.)

en un nombre fini de systèmes complets linéaires; donc les systèmes $\{C\}$, $\{C'\}$ sont contenus dans des systèmes linéaires.

Les C′ marquent sur une C quelconque une série d'ordre m et d'indice ν', m étant le nombre de points communs à deux courbes C, C′. D'après un théorème de M. Castelnuovo (*), cette série possède

$$N = 2\nu'(m + p - 1)$$

points doubles qui, évidemment, appartiennent à la courbe T. Lorsque la C décrit le système $\{C\}$, ces N points décrivent sur T une série d'indice ν et possédant par conséquent

$$2\nu(N + \tau - 1) = 2\nu(\tau - 1) + 4\nu\nu'(m + p - 1)$$

points doubles. Ces points doubles proviennent des δ courbes C possédant un point double, ou des $\varkappa$ couples de courbes C, C′ possédant un contact d'ordre supérieur, ou encore des σ' points de base de $\{C'\}$; donc

$$2\nu(\tau - 1) + 4\nu\nu'(m + p - 1) = \delta + \varkappa + \sigma'.$$

En permutant le rôle des deux systèmes, on obtient une seconde formule :

$$2\nu'(\tau - 1) + 4\nu\nu'(m + p' - 1) = \delta' + \varkappa + \sigma.$$

En soustrayant les deux formules l'une de l'autre, il vient

$$2\tau(\nu - \nu') + 4\nu\nu'(p - p') = \delta - \delta' - (\sigma - \sigma'). \qquad (3)$$

(*) SEVERI, *Lezioni di geometria algebrica*. Padova, Angelo Draghi, 1908, pp. 240-242.

Si n, n' désignent les degrés respectifs des systèmes $\{C\}$, $\{C\}$, on sait, d'après M. R. Torelli (*), que les nombres δ, δ' ont pour valeurs, respectivement

$$\delta = \nu(n + \sigma + 4p + \mathrm{I}),$$
$$\delta' = \nu'(n' + \sigma' + 4p' + \mathrm{I}),$$

I étant l'invariant de Zeuthen-Segre de la surface F. En substituant ces valeurs dans la formule obtenue et en supposant $\nu \gtrless \nu'$, on trouve pour τ la valeur

$$\tau = \frac{1}{2(\nu - \nu')}[4\mathrm{I}(\nu - \nu') + 4\nu p(1 - \nu') - 4\nu' p'(1 - \nu) + \sigma(\nu - 1) - \sigma'(\nu' - 1) + \nu n - \nu' n'].$$

Cette formule n'est plus exacte lorsque $\nu = \nu'$. Alors l'équation (3) donne

$$\delta - \sigma - 4\nu^2 p = \delta' - \sigma' - 4\nu'^2 p'.$$

Ainsi, *si on donne sur une surface algébrique régulière un système continu* $\{C\}$ *d'indice* ν *formé de courbes de genre* p *et doté de* σ *points de base et de* δ *courbes à point double, l'expression*

$$\mathrm{I}_\nu = \delta - \sigma - 4\nu^2 p$$

ne varie qu'avec l'indice.

Liége, le 25 janvier 1909.

(*) *Sui sistemi algebrici di curve appartennenti ad una superficie algebriche.* (Atti della R. Accad. di Torino, t. XLII, pp. 86-99.)

Bruxelles. — Hayez, imprimeur.