Bulletin de la Classe des sciences

Note sur l’enveloppe des quadriques de Lie d’une surface

Lucien Godeaux

Résumé
Étude de la configuration formée par certaines suites de Laplace de l'espace à cinq dimensions attachées à une surface de l’espace ordinaire lorsqu’il y a conservation des asymptotiques sur les nappes de l’enveloppe des quadriques de Lie de cette surface.

Note sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Étude de la configuration formée par certaines suites de Laplace de l'espace à cinq dimensions attachées à une surface de l'espace ordinaire lorsqu'il y a conservation des asymptotiques sur les nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie de cette surface.

Les quadriques de Lie attachées aux points x d'une surface (x) non réglée, ont en général, en dehors du point x, quatre points caractéristiques y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}. En général, les asymptotiques des surfaces (y_{11}), (y_{12}), (y_{21}), (y_{22}) ne correspondent pas aux asymptotiques de la surface (x). Dans cette note, nous nous plaçons dans le cas où ces asymptotiques se correspondent. Nous considérons la suite de Laplace L de l'espace à cinq dimensions déterminée par les points qui représentent les tangentes aux lignes asymptotiques de la surface (x) [1]. Il existe alors quatre suites de Laplace inscrites dans la suite L et une suite de Laplace L′ inscrite dans chacune des suites précédentes. Chacun des points de cette suite L′ est commun à deux plans déterminés chacun par trois points consécutifs de la suite L. Chacun de ces plans contient deux points de la suite L′. On obtient ainsi une configuration qu'il nous a paru intéressant d'étudier.

1. Soit (x) une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées de Wilczynski du point x satisfont au système complètement intégrable

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1x = 0,$$

$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2x = 0.$$

(1) Voir notre exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace réglé* (Actualités scient. et indust., n° 138, Paris, Hermann, 1934).

Désignons par U, V les points de l'hyperquadrique de Klein $\underset{\sim}{Q}$ de S_5 représentant les tangentes asymptotiques $|x x^{10}|$, $|x x^{01}|$ au point x à la surface (x). Nous avons

$$U^{10} + 2bV = 0, \qquad V^{01} + 2aU = 0$$

et les points U, V sont consécutifs dans une suite de Laplace

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots \tag{L}$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

On a

$$\begin{aligned} &U_n^{01} = U_{n+1} + U_n (\log bh_1h_2 \ldots h_n)^{01}, \\ &U_n^{10} = h_n U_{n-1}, \\ &U_n^{11} - U_n^{10} (\log bh_1h_2 \ldots h_n)^{01} - h_n U_n = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

où l'on a posé

$$h_n = -(\log bh_1h_2 \ldots h_{n-1})^{11} + h_{n-1} = -(\log b^n h_1^{n-1} \ldots h_{n-1})^{11} + 4ab.$$

On a de même

$$\begin{aligned} &V_n^{10} = V_{n+1} + V_n (\log ak_1k_2 \ldots k_n)^{10}, \\ &V_n^{01} = k_n V_{n-1}, \\ &V_n^{11} - V_n^{01} (\log ak_1 \ldots k_{n-1})^{10} - k_n V_n = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

moyennant

$$k_n = -(\log ak_1k_2 \ldots k_{n-1})^{11} + k_{n-1} = -(\log a^n k_1^{n-1} \ldots k_{n-1})^{11} + 4ab.$$

Les invariants de l'équation (1) sont h_n, h_{n+1} et ceux de l'équation (2) sont k_n, k_{n+1}.

En particulier, les invariants de l'équation

$$U^{11} - U^{10} (\log b)^{01} - 4abU = 0$$

sont $4ab$ et h_1, et ceux de l'équation

$$V^{11} - V^{01} (\log a)^{10} - 4abV = 0$$

sont $4ab$ et k_1.

La suite L est autopolaire par rapport à Q. D'une manière précise, l'hyperplan polaire de U_n par rapport à Q est $V_{n-2}V_{n-1}V_nV_{n+1}V_{n+2}$ et celui de V_n est $U_{n-2}U_{n-1}U_nU_{n+1}U_{n+2}$. Les plans conjugués $U_nU_{n+1}U_{n+2}$ et $V_nV_{n+1}V_{n+2}$ coupent Q suivant deux coniques qui représentent deux demi-quadriques ayant le même support Φ_n. On obtient ainsi une suite de quadriques Φ, Φ_1, Φ_2, ... dont la première est la quadrique de Lie. Deux quadriques consécutives Φ_n, Φ_{n+1} se coupent suivant quatre droites formant un quadrilatère dont les sommets sont des points caractéristiques des deux quadriques.

2. Les points U_1, V_1 ne peuvent appartenir à Q ; nous supposerons que les points U_2, V_2 n'appartiennent pas non plus à Q. Soient C', C'' les points de rencontre de la droite V_1V_2 avec Q et D', D'' ceux de la droite U_1U_2. Les droites $C'D'$, $C'D''$, $C''D'$, $C''D''$ appartiennent à Q et représentent quatre faisceaux de rayons dont les sommets y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22} sont, avec le point x, les points caractéristiques de la quadrique de Lie Φ.

Nous avons démontré que la condition nécessaire et suffisante pour que les asymptotiques des surfaces (y_{11}), (y_{12}), (y_{21}), (y_{22}) soient les courbes u, v est que les points C', C'', D', D'' décrivent des réseaux conjugués les premiers à la congruence (V_1V_2), les seconds à la congruence (U_1U_2).

Posons

$$\alpha = 2\,(\log\ a)^{20} + \overline{(\log\ a)^{10}}^2 + 4(b^{01} - c_1),$$
$$\beta = 2\,(\log\ b)^{02} + \overline{(\log\ b)^{01}}^2 + 4(a^{10} + c_2).$$

La condition se traduit par

$$(\log\ a^2\alpha)^{10} = 0, \quad (\log\ b^2\beta)^{01} = 0.$$

L'une de ces relations est d'ailleurs une conséquence de l'autre, car on a

$$a\alpha\ (\log\ a^2\alpha)^{10} = b\beta\ (\log\ b^2\beta)^{01}.$$

Les droites $C'C'^{01}$, $C''C''^{01}$ se coupent en un point A et les droites $D'D'^{10}$, $D''D''^{10}$ en un point B. Les droites $C'C'^{10}$, $C''C''^{10}$ passent par B et les droites $D'D'^{01}$, $D''D''^{01}$ par A. Nous poserons

$$\left.\begin{aligned} A &= 2a[V_2 + V_1 (\log ak_1)^{10} + \alpha V], \\ B &= 2b[U_2 + U_1 (\log bh_1)^{01} + \beta U]. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Nous avons établi les relations

$$V_3 + V_2 (\log a^3k_1^2k_2)^{10} + \alpha_1 V_1 + 2b[U_2 + U_1 (\log bh_1)^{01} + \beta U] = 0,$$
$$U_3 + U_2 (\log b^3h_1^2h_2)^{01} + \beta_1 U_1 + 2a[V_2 + V_1 (\log ak_1)^{10} + \alpha V] = 0,$$

où l'on a posé

$$\alpha_1 = \alpha + (\log ak_1)^{20} + (\log ak_1)^{10} (\log a^2k_1)^{10},$$
$$\beta_1 = \beta + (\log bh_1)^{02} + (\log bh_1)^{01} (\log b^2h_1)^{01}.$$

Ces relations s'écrivent

$$\left.\begin{aligned} V_3 + V_2 (\log a^3k_1^2k_2)^{10} + \alpha_1 V_1 + B &= 0, \\ U_3 + U_2 (\log b^3h_1^2h_2) + \beta_1 U_1 + A &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

En dérivant la première des relations (1) par rapport à u et en tenant compte de la première des relations (2), on a

$$A^{10} + 2aB = 0.$$

On obtient de même

$$B^{01} + 2bA = 0.$$

Les points A, B sont donc consécutifs dans une suite de Laplace. Observons que le point A est l'intersection des plans VV_1V_2 et $U_1U_2U_3$, le point B étant l'intersection des plans UU_1U_2 et $V_1V_2V_3$.

3. Désignons par $A_1, A_2, \ldots$ les transformés successifs de Laplace du point A dans le sens des v, par $B_1, B_2, \ldots$ ceux du point B dans le sens des u.

Les points A, B satisfont aux équations de Laplace

$$A^{11} - A^{10} (\log a)^{01} - 4abA = 0,$$
$$B_{11} - B^{01} (\log b)^{10} - 4abB = 0,$$

dont les invariants sont respectivement $4ab$ et k_1, $4ab$ et h_1.

Nous posons

$$A_1 = A^{01} - A (\log a)^{01},$$

d'où $A_1^{10} = k_1 A$ et

$$A_1^{11} - A_1^{10} (\log ak_1)^{01} - k_1 A_1 = 0.$$

Nous poserons de même

$$B_1 = B^{10} - B (\log b)^{10},$$

d'où $B_1^{01} = h_1 B$ et

$$B_1^{11} - B_1^{01} (\log bh_1)^{10} - h_1 B_1 = 0.$$

Plus généralement, nous aurons

$$A_n = A_{n-1}^{01} - A_{n-1} (\log ak_1 \dots k_{n-1})^{01},$$
$$A_n^{10} = k_n A_{n-1},$$
$$A_n^{11} - A_n^{10} (\log ak_1 \dots k_n)^{01} - k_n A_n = 0,$$

et

$$B_n = B_{n-1}^{10} - B_{n-1} (\log bh_1 \dots h_{n-1})^{10},$$
$$B_n^{01} = h_n B_{n-1},$$
$$B_n^{11} - B_n^{01} (\log bh_1 \dots h_n)^{10} - h_n B_n = 0.$$

Observons que les invariants des équations de Laplace satisfaites par le point A_n sont k_n et k_{n-1}, par le point B_n, h_n et h_{n-1}.

3. Le point A appartient aux plans VV_1V_2 et $U_1U_2U_3$, donc le point A_1 appartient aux plans UVV_1 et $U_2U_3U_4$, le point A_2 aux plans U_1UV et $U_3U_4U_5$, le point A_3 aux plans UU_1U_2 et $U_4U_5U_6$, ..., le point A_n aux plans

$$U_{n-3}U_{n-2}U_{n-1} \quad \text{et} \quad U_{n+1}U_{n+2}U_{n+3}.$$

Posons

$$H_n = \log \frac{b^{n+1} h_1^n \dots h_n}{a^{n-2} k_1^{n-3} \dots k_{n-3}},$$

$$K_n = \log \frac{a^{n+1} k_1^n \dots k_n}{b^{n-2} h_1^{n-3} \dots h_{n-3}}$$

et

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + K_n^{20} + K_n^{10} \left(\log \frac{ak_1 \dots k_n}{bh_1 \dots h_{n-2}}\right)^{10},$$

$$\beta_n = \beta_{n-1} + H_n^{02} + H_n^{01} \left(\log \frac{bh_1 \dots h_n}{ak_1 \dots k_{n-2}}\right)^{01}.$$

En dérivant la première des relations (2) par rapport à v, on a

$$U_4 + H_3^{01}U_3 + \beta_2 U_2 + \beta_1 \left(\log \frac{\beta_1 bh_1}{a}\right)^{01} U_1 + A_1 = 0.$$

On doit donc avoir

$$\beta_1^{01} + \beta_1 \left(\log \frac{bh_1}{a}\right)^{01} = 0,$$

relation sur laquelle nous reviendrons.

Plus généralement, on trouve

$$U_{n+3} + H_{n+2}^{01}U_{n+2} + \beta_{n+1}U_{n+1} + A_n = 0, \tag{3}$$

avec

$$\beta_n^{01} + \beta_n \left(\log \frac{bh_1 \dots h_n}{ak_1 \dots k_{n-1}}\right)^{01} = 0.$$

D'une manière analogue, on trouve

$$V_{n+3} + K_{n+2}^{10}V_{n+2} + \alpha_{n+1}V_{n+1} + B_n = 0, \tag{4}$$

avec

$$\alpha_n^{10} + \alpha_n \left(\log \frac{ak_1 \dots k_n}{bh_1 \dots h_{n-1}}\right)^{10} = 0.$$

4. Partons de la relation (3) et dérivons-la par rapport à u. Nous obtenons

$$k_n U_{n+2} + [h_{n+2} H_{n+2}^{01} + \beta_{n+1}^{10}] U_{n+1} + h_{n+1}\beta_{n+1} U_n + k_n A_{n-1} = 0.$$

On doit avoir, en remplaçant n par $n-1$ dans (3),

$$U_{n+2} + H_{n+1}^{01}U_{n+1} + \beta_n U_n + A_{n-1} = 0.$$

On en conclut que l'on a

$$h_{n+2}H_{n+2}^{01} + \beta_{n+1}^{10} = k_n H_{n+1}^{01},$$

$$h_{n+1}\beta_{n+1} = k_n \beta_n.$$

La première relation s'établit sans difficulté en tenant compte de la formule

$$\beta^{10} = -2h_1 (\log bh_1)^{01},$$

facile à obtenir.

La seconde relation, où l'on remplace successivement n par $n-1$, $n-2$, ..., 0 donne

$$
\begin{aligned}
h_n\beta_n &= k_{n-1}\beta_{n-1}, \\
h_{n-1}\beta_{n-1} &= k_{n-2}\beta_{n-2}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
h_1\beta_1 &= 4ab\beta.
\end{aligned}
$$

La dernière relation s'obtient en égalant les valeurs de β^{11} déduites de

$$\beta^{01} + 2\beta\,(\log b)^{01} = 0, \qquad \beta^{10} + 2h_1\,(\log bh_1)^{01} = 0.$$

De cette dernière relation, on déduit la formule

$$\beta_1^{01} + \beta_1\left(\log\frac{bh_1}{a}\right)^{01} = 0,$$

déjà rencontrée plus haut. On a d'autre part

$$\beta_1^{10} = 4ab\,(\log bh_1)^{01} - h_2\,(\log b^3h_1^2h_2)^{01},$$

c'est-à-dire

$$\beta_1^{10} = 4ab\,(\log bh_1)^{01} - h_2\mathrm{H}_2^{01}.$$

En égalant les valeurs de β_1^{11} tirées de ces deux relations, on a

$$h_2\beta_2 = k_1\beta_1,$$

et ainsi de suite.

De tout ceci, on déduit

$$h_1h_2\ldots h_n\beta_n = 4abk_1\ldots k_{n-1}\beta.$$

On a, par suite,

$$\beta_n^{01} + \beta_n\left(\log\frac{bh_1\ldots h_n}{ak_1\ldots k_{n-1}}\right)^{01} = 0,$$

relation déjà rencontrée plus haut.

On trouvera de même

$$
\begin{aligned}
k_{n+2}\mathrm{K}_{n+2}^{10} + \alpha_{n+1}^{01} &= h_n\mathrm{K}_{n+1}^{10}, \\
k_1k_2\ldots k_n\alpha_n &= 4abh_1\ldots h_{n-1}\alpha.
\end{aligned}
$$

5. En dérivant la première des relations (1) par rapport à v, on obtient

$$A_1 = 2ak_1 \left[V_1 - V (\log ak_1)^{10} - 2\frac{a}{k_1} U \right],$$

ce qui peut s'écrire

$$A_1 = -\frac{ak_1}{b}[\alpha_1 U + 2bV (\log ak_1)^{10} - 2bV_1].$$

En dérivant cette relation par rapport à v, on trouve

$$A_2 = -\frac{ak_1k_2}{bh_1}[\alpha_2 U_1 - h_1 K_2^{10} U - 2bh_1 V].$$

Une troisième dérivation donne

$$A_3 = -\frac{ak_1k_2k_3}{bh_1h_2}[\alpha_3 U_2 - h_2 K_3^{10} U_1 + h_1h_2 U].$$

Plus généralement, on obtient

$$A_n = -\frac{ak_1 \dots k_n}{bh_1 \dots h_{n-1}}[\alpha_n U_{n-1} - h_{n-1} K_n^{10} U_{n-2} + h_{n-2}h_{n-1} U_{n-3}].$$

De même, on obtient

$$B_n = -\frac{bh_1 \dots h_n}{ak_1 \dots k_{n-1}}[\beta_n V_{n-1} - k_{n-1} H_n^{01} V_{n-2} + k_{n-2}k_{n-1} V_{n-3}].$$

6. Les points C', C'' décrivent, lorsque u, v varient, des réseaux conjugués à la congruence (V_1, V_2) ; ils appartiennent donc à des suites de Laplace. Nous désignerons par $C'_1, C'_2, \dots$ les transformés de Laplace de C' dans le sens des u, par $C''_1, C''_2, \dots$ ceux de C'', par C'_{-1}, C'_{-2} les transformés de Laplace de C' dans le sens de v, par C''_{-1}, C''_{-2} ceux de C''.

Les points C'_1, C''_1 appartiennent à la droite V_2V_3, les points, C'_2, C''_2 à la droite V_3, V_4, ..., les points C'_n, C''_n à la droite V_{n+1}, V_{n+2}.

Les points C'_{-1}, C''_{-1} appartiennent à la droite VV_1, les points C'_{-2}, C''_{-2} à la droite UV, ..., les points C'_{-n}, C''_{-n} à la droite U_{n-3}, U_{n-2}.

Appelons de même D'_1, D'_2, ... les transformés de Laplace du point D' dans le sens des v, D''_1, D''_2, ... ceux de D'' ; par D'_{-1},

D'_{-2}, ... les transformés de Laplace de D' dans le sens des u, par D''_{-1}, D''_{-2}, ... ceux de D''. Les points D'_n, D''_n appartiennent à la droite $U_{n+1}U_{n+2}$ et les points D'_{-n}, D''_{-n} à la droite $V_{n-3}V_{n-2}$.

Le point A appartient aux droites $C'C'_{-1}$, $C''C''_{-1}$ et aux droites $D'D'_1$, $D''D''_1$. Le point B appartient aux droites $D'D'_{-1}$, $D''D''_{-1}$ et aux droites $C'C'_1$, $C''C''_1$. Le point A_1 appartient aux droites $C'_{-1}C'_{-2}$, $C''_{-1}C''_{-2}$, $D'_1D'_2$, $D''_1D''_2$ et le point B_1 aux droites $D'_{-1}D'_{-2}$, $D''_{-1}D''_{-2}$, $C'_1C'_2$, $C''_1C''_2$. Plus généralement, le point A_n appartient aux droites $C'_{-n}C'_{-(n+1)}$, $C''_{-n}C''_{-(n+1)}$ et aux droites $D'_nD'_{n+1}$, $D''_nD''_{n+1}$. Le point B_n appartient aux droites $D'_{-n}D'_{-(n+1)}$, $D''_{-n}D''_{-(n+1)}$ et aux droites $C'_nC'_{n+1}$, $C''_nC''_{n+1}$.

7. Le point A appartient aux plans VV_1V_2 et $U_1U_2U_3$, le point A_1, aux plans UVU_1 et $U_2U_3U_4$, le point A_2 aux plans VUU_1 et $U_3U_4U_5$, le point A_3 aux plans UU_1U_2 et $U_4U_5U_6$, ..., le point A_n aux plans $U_{n-3}U_{n-2}U_{n-1}$ et $U_{n+1}U_{n+2}U_{n+3}$.

De même, le point B_n appartient aux plans $V_{n-3}V_{n-2}V_{n-1}$ et $V_{n+1}V_{n+2}V_{n+3}$.

L'hyperplan polaire du point A_n par rapport à Q contient les plans $V_{n-3}V_{n-2}V_{n-1}$ et $V_{n+1}V_{n+2}V_{n+3}$ et l'hyperplan polaire de B_n contient les plans $U_{n-3}U_{n-2}U_{n-1}$ et $U_{n+1}U_{n+2}U_{n+3}$. Considérons les quadriques Φ_{n-3} et Φ_{n+1}. Aux sections de Q par les plans $V_{n-3}V_{n-2}V_{n-1}$ et $V_{n+1}V_{n+2}V_{n+3}$ correspondent des demi-quadriques de supports respectifs Φ_{n-3}, Φ_{n+1} dont les génératrices appartiennent à un même complexe linéaire ayant pour seconde image le point A_n.

De même, aux sections de Q par les plans $U_{n-3}U_{n-2}U_{n-1}$ et $U_{n+1}U_{n+2}U_{n+3}$ correspondent des demi-quadriques dont les supports respectifs sont Φ_{n-3}, Φ_{n+1} et dont les génératrices appartiennent à un complexe linéaire dont la seconde image est B_n.

Le plan $U_{n+1}U_{n+2}U_{n+3}$ contient les points A_n et A_{n+4}. De même, le plan $V_{n+1}V_{n+2}V_{n+3}$ contient les points B_n et B_{n+4}.

Les points A_n et A_{n+4} sont en général distincts ; s'ils coïncidaient, la suite de Laplace déterminée par les points A et B aurait la période quatre, le point A_4 coïnciderait avec le point A et B_n avec B_{n+4}. Si les points A et A_4 coïncidaient, on aurait $k_4 = 4ab$, ce qui implique une nouvelle relation entre les données.

Liège, le 14 janvier 1953.