SUR UN COMPLEXE BILINÉAIRE DE CONIQUES;

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

1. J'ai démontré récemment le théorème suivant (¹) :

Tout complexe bilinéaire de coniques est engendré pour l'intersection des éléments de deux variétés en correspondance birationnelle; l'une de ces variétés est constituée par les plans de l'espace, l'autre par une triple infinité de quadriques appartenant à un ∞^5-système linéaire.

Soient Σ un complexe engendré de cette manière et V la variété de quadriques employée. Puisque V est unicursale, on peut établir entre cette variété et un ∞^3-système linéaire V′ de quadriques une correspondance birationnelle. Dès lors, à une conique du complexe Σ correspondra une et généralement une seule conique du complexe Σ' engendré au moyen de V′, et *vice versa;* donc :

Tout complexe bilinéaire de coniques est birationnellement équivalent au complexe engendré par l'intersection des plans de l'espace et des quadriques d'un ∞^3-système linéaire en correspondance birationnelle.

Dans cette Note, je vais étudier le complexe engen-

(¹) *Détermination des variétés de complexes bilinéaires de coniques* (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique : Classe des Sciences*, 1908, p. 597-601, 812-814).

G.

dré au moyen d'un ∞^3-système linéaire de quadriques, lorsque la correspondance birationnelle qui lie ce système à l'espace planaire est une collinéation qui fait correspondre à une quadrique un plan, à un faisceau et à une gerbe de quadriques respectivement un faisceau et une gerbe de plans.

2. Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées courantes de l'espace,

$$(1) \qquad \lambda_1 a 1_x^2 + \lambda_2 a 2_x^2 + \lambda_3 a 3_x^2 + \lambda_4 a 4_x^2 = 0$$

le système linéaire triplement infini de quadriques, $a1_x^2, \ldots, a4_x^2$ étant les premiers membres des équations de quatre quadriques linéairement indépendantes.

Soit

$$(2) \qquad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

l'équation d'un plan quelconque de l'espace.

Les équations de la collinéation peuvent s'écrire

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4 = u_1 : u_2 : u_3 : u_4,$$

de sorte que les équations d'une conique quelconque du complexe peuvent s'écrire

$$(3) \qquad u_1 a 1_x^2 + u_2 a 2_x^2 + u_3 a 3_x^2 + u_4 a 4_x^2 = 0,$$

$$(2) \qquad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0,$$

u_1, u_2, u_3, u_4 étant quatre paramètres variables homogènes.

3. Les coniques du complexe dont les plans forment un faisceau (et, par conséquent, les quadriques qui les marquent sur ces plans forment aussi un faisceau) engendrent une surface cubique dont l'équation se construit facilement.

Soit

$$v_x + \mu w_x = 0$$

l'équation d'un plan quelconque du faisceau. La quadrique (3) qui correspond à ce plan a pour équation

$$\sum_{i=1}^{4} v_i a i_x^2 + \mu \sum_{i=1}^{4} w_i a i_x^2 = 0.$$

En éliminant le paramètre μ entre ces deux dernières équations, on trouve que la surface cubique est représentée par l'évanouissement du déterminant

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{4} v_i a i_x^2 & \sum_{i=1}^{4} w_i a i_x^2 \\ v_x & w_x \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation peut s'écrire en fonction de coordonnées plückériennes de l'axe du faisceau des plans des coniques de la surface. Si $p_{12}, \ldots, p_{34}$ sont les coordonnées plückériennes de cette droite, on trouve

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} p_{ij} \begin{vmatrix} a i_x^2 & a j_x^2 \\ x_i & x_j \end{vmatrix} = 0.$$

4. La condition pour qu'une conique du complexe passe par un point fixe s'écrit

$$\sum_{i=1}^{4} u_i a i_y^2 = 0, \qquad u_y = 0.$$

Ces coniques engendrent une surface dont l'équation s'obtient en éliminant les u entre les deux équations précédentes et les équations (2) et (3).

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} a1_y^2 & a2_y^2 & a3_y^2 & a4_y^2 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ a1_x^2 & a2_x^2 & a3_x^2 & a4_x^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Les dérivées premières de l'équation (6) s'annulent pour $x = y$; donc :

Les coniques d'un complexe bilinéaire passant par un point fixe engendrent une surface cubique possédant un point double au point choisi.

L'équation (6) peut se mettre sous la forme (5) en posant

$$\rho p_{ij} = \begin{vmatrix} ai_y^2 & aj_y^2 \\ y_i & y_j \end{vmatrix} \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4),$$

ρ étant un facteur de proportionnalité. On en conclut que les plans des coniques passant par un point fixe passent par une droite issue du point (ce qui est la définition même de la classe) et que *cette droite décrit un complexe cubique.*

5. Les coniques du complexe dont les plans passent par un point fixe (y) engendrent une congruence bilinéaire. Cette congruence a été étudiée par M. Montesano [1] et rencontrée plus tard par M. Veneroni [2] comme seul type de congruence bilinéaire de coniques.

Les équations de la congruence sont (2) et (3) jointes à l'équation

$$u_y = 0.$$

---

[1] *Su di un sistema lineare di coniche nello spazio* (*Atti di Torino*, t. XXVII, 1892).

[2] *Sopra alcuni sistemi di cubiche gobbe* (*Rendiconti di Palermo*, t. XVI, 1902).

On déduit de ces trois équations que la conique de la congruence passant par un point (x) a des paramètres (u) proportionnels aux déterminants tirés de la matrice

$$\left\|\begin{matrix} a1_x^2 & a2_x^2 & a3_x^2 & a4_x^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{matrix}\right\|.$$

En particulier, si le point x est un point singulier, c'est-à-dire un point par lequel passent ∞^1 coniques de la congruence, la matrice s'annule et représente une courbe gauche d'ordre 7 et de genre 5 (1) passant par le point y et rencontrant six fois toutes les coniques de la congruence.

6. Considérons une congruence de classe n contenue dans le complexe bilinéaire de coniques. Un conique de la congruence est unique dans le plan qui la contient, donc les plans de ces coniques enveloppent une surface de classe n. Les équations (4) et (6) étant du même type, la congruence est aussi d'ordre n; donc :

Une congruence de coniques contenue dans un complexe bilinéaire a son ordre et sa classe égaux.

Les coniques du complexe qui s'appuient sur une droite engendrent une congruence bicubique.

Une congruence de coniques de degré n contenue dans un complexe linéaire est représentée par les équations (2) et (3) jointes à l'équation

$$u_\alpha^n = 0.$$

7. Il y a ∞^2 coniques du complexe qui dégénèrent,

(1) Stuyvaert, *Cinq études de Géométrie analytique*. Gand, Van Gœthem, 1908.

leurs plans enveloppent une surface de la cinquième classe. On voit aisément que, pour qu'une conique du complexe dégénère, son plan doit toucher la quadrique correspondante ; donc l'équation de la surface enveloppée sera

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{4} u_i ai_{11} & \ldots & \ldots & \sum_{i=1}^{4} u_i ai_{14} & u_1 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & u_2 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & u_3 \\ \sum_{i=1}^{4} u_i ai_{41} & \ldots & \ldots & \sum_{i=1}^{4} u_i ai_{44} & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Note. — M. G. Humbert a considéré un complexe bilinéaire de coniques particulier [1]. Les équations de ce complexe étaient

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 = 0,$$
$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0.$$

---

[1] *Sur un complexe remarquable de coniques et sur la surface du troisième ordre* (*Journal de l'École Polytechnique*, Cahier LXIV^e, 1894).

Liège, 13 janvier 1909

(Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4^e série, t. IX; juillet 1909.)

43741 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.