Bulletin de la Classe des sciences

Construction de surfaces canoniques de diviseur deux

Lucien Godeaux

Résumé
Construction de surfaces dont les sections hyperplanes constituent le système canonique, images d'involutions du second ordre privées de points unis et par conséquent de diviseur deux.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Construction de surfaces canoniques de diviseur deux,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Construction de surfaces dont les sections hyperplanes constituent le système canonique, images d'involutions du second ordre privées de points unis et par conséquent de diviseur deux.

Dans cette note, nous considérons des surfaces passant par les arêtes d'un tétraèdre et nous en déterminons les surfaces adjointes. Celles-ci ont comme parties fixes les faces du tétraèdre et par conséquent les courbes canoniques des surfaces étudiées ont comme composante fixe une courbe d'ordre zéro. Nous considérons ensuite celles de ces surfaces qui sont invariantes pour la transformation birationnelle involutive qui fait correspondre aux plans de l'espace les surfaces cubiques circonscrites au tétraèdre. On obtient ainsi des surfaces contenant une involution du second ordre. Nous considérons plus particulièrement celles de ces surfaces sur lesquelles l'involution du second ordre est privée de points unis. Nous construisons les surfaces-images de ces involutions, dont le système canonique coïncide avec celui des sections hyperplanes. Le diviseur de Severi de ces surfaces est égal à deux.

Nous utilisons les résultats que nous avons obtenus sur les involutions du second ordre appartenant à une surface algébrique (1).

---

(1) *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1914, pp. 289-312) ; *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités scient., n° 270 ; Paris, Hermann, 1935).

1. Désignons par φ_{2n}, ψ_{2n} des formes algébriques à quatre variables, de degré $2n$. Considérons la surface F d'équation

$$\varphi_{2n}(x_2x_3x_4,\ x_3x_4x_1,\ x_4x_1x_2,\ x_1x_2x_3) + (x_1x_2x_3x_4)^n\psi_{2n}(x_1,x_2,x_3,x_4) = 0.$$

La surface F est d'ordre $6n$ et passe $2n$ fois par les arêtes du tétraèdre de référence. Pour $n = 1$, on obtient la surface d'Enriques, de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$, $P_3 = 0$; nous supposerons dans la suite $n > 1$.

Si l'on applique à la surface F la transformation T d'équations

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_2y_3y_4 : y_3y_4y_1 : y_4y_1y_2 : y_1y_2y_3,$$

elle se transforme en une surface F′, d'équation

$$\psi_{2n}(y_2y_3y_4,\ y_3y_4y_1,\ y_4y_1y_2,\ y_1y_2y_3) + (y_1y_2y_ny_4)^n\varphi_{2n}(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4) = 0,$$

du même type que F.

Les adjointes à la surface F sont des surfaces d'ordre $6n - 4$ passant $2n - 1$ fois par les arêtes du tétraèdre de référence. Elles comprennent donc des faces de ce tétraèdre comme partie et sont complétées par des surfaces d'ordre $6n - 8$ passant $2n - 3$ fois par les arêtes du tétraèdre de référence. Notons en passant que *le système canonique de* F *possède une composante fixe d'ordre zéro*. Nous désignerons par Φ les parties variables des adjointes.

Les surfaces Φ passent évidemment le même nombre de fois par les sommets du tétraèdre de référence ; soit x cette multiplicité. Puisque la transformation T fait correspondre à F une surface F′ de même espèce, elle fait correspondre aux adjointes Φ des surfaces Φ', adjointes à F′ et du même type que les surfaces Φ. En particulier, les surfaces Φ, Φ' ont le même ordre $6n - 8$. On a donc

$$3(6n - 8) - 4x = 6n - 8,$$

d'où $x = 3n - 4$. Les surfaces Φ ont donc la multiplicité $3n - 4$ aux sommets O_1, O_2, O_3, O_4 du tétraèdre de référence. C'est un résultat que nous vérifierons dans un instant.

Les surfaces Φ rencontrent les faces du tétraèdre de référence suivant les trois arêtes comptées chacune $2n - 3$ fois et suivant une droite variable.

2. Nous allons former l'équation des adjointes Φ.

Ordonnons l'équation par rapport aux puissances décroissantes de x_1 et supposons que l'on puisse avoir un terme en x_1^{3n-4+i}, où $i \geqslant 0$. Écrivons ce terme sous la forme

$$x_1^{3n-4+i} f_{3n-4-i}(x_2, x_3, x_4),$$

où f_{3n-4-i} désigne une forme de degré $3n - 4 - i$.

La surface Φ passant $2n - 3$ fois par O_1O_4, si l'on fait $x_3 = \lambda x_2$ dans f_{3n-4-i}, on doit pouvoir mettre en évidence x_2^{2n-3}. Cela implique que x_4 figure dans f_{3n-4-i} à la puissance $n + i - 1$ au plus. Mais il en est de même de x_2 et de x_3, comme on peut le montrer en considérant les arêtes O_1O_2, O_1O_3. Il en résulte que le terme de f_{3n-4-i} de degré le plus élevé en x_2, x_3 a précisément le degré $2(n - i - 1)$. On doit avoir

$$2(n - i - 1) \geqslant 2n - 3,$$

ce qui entraîne $2i \leqslant 1$ et $i = 0$.

Le terme de degré le plus élevé en x_1 dans l'équation de Φ est donc

$$x_1^{3n-4} f_{3n-4}(x_2, x_3, x_4).$$

Par conséquent, le point O_1 est bien multiple d'ordre $3n - 4$ pour les surfaces Φ.

Nous écrirons l'équation des surfaces Φ sous la forme

$$\left.\begin{aligned} x_1^{3n-4} f_{3n-4} + x_1^{3n-5} f_{3n-3} + \dots + x_1 f_{6n-9} \\ + (x_2x_3x_4)^{2n-3} f_1 = 0, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

où f_k désigne une forme en x_2, x_3, x_4 de degré k.

3. Nous commencerons par exprimer que les droites O_2O_3, O_3O_4, O_2O_4 sont multiples d'ordre $2n - 3$ pour les surfaces Φ.

Si, dans l'équation (1), on fait $x_2 = \lambda x_1$, on doit pouvoir mettre x_1^{2n-3} en évidence. Il en résulte que si l'on considère le terme

$$x_1^{3n-4-i} f_{3n-4+i},$$

x_2 doit figurer à la puissance

$$2n-3-(3n-4-i) = i-n+1$$

au moins. Posons

$$i = n-1+k.$$

Dans le terme

$$x_1^{2n-k-3} f_{4n-5+k},$$

on doit pouvoir mettre x_2^k en évidence.

Pour la même raison, il en est de même de x_3^k et de x_4^k. Nous écrirons donc

$$f_{4n-5+k} = (x_2x_3x_4)^k \bar{f}_{4n-2k-5}.$$

L'équation (1) peut donc maintenant s'écrire

$$\left.\begin{aligned} & x_1^{3n-4} f_{3n-4} + \dots + x_1^{2n-2} f_{4n-6} \\ & \quad + x_1^{2n-3} f_{4n-5} + x_1^{2n-4} x_2x_3x_4 \bar{f}_{4n-7} + x_1^{2n-5}(x_2x_3x_4)^2 \bar{f}_{4n-9} + \\ & \quad \dots + x_1^{2n-k-3}(x_2x_3x_4)^k \bar{f}_{4n-2k-5} + \dots + x_1(x_2x_3x_4)^{2n-4} \bar{f}_3 \\ & \quad + (x_2x_3x_4)^{2n-3} f_1 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

4. Nous allons maintenant exprimer que les droites O_1O_2, O_1O_3, O_1O_4 sont multiples d'ordre $2n-3$.

Considérons tout d'abord le terme

$$x^{3n-4-i} f_{3n-4+i},$$

où $i \geq n-2$. Écrivons

$$f_{3n-4+i} = x_4^{3n-4+i} a_0 + \dots + x_4^{3n-4+i-k} a_k(x_2, x_3) + \dots,$$

où les a sont des formes en x_2, x_3 dont le degré est indiqué par l'indice.

Si l'on fait $x_3 = \lambda x_2$, on doit pouvoir mettre x_2^{2n-3} en évidence, donc on a $k \geq 2n-3$. On en conclut que la plus haute puissance de x_4 dans f_{3n-4+i} est $n-1+i$. On démontrerait de même que la plus haute puissance de x_2 et de x_3 dans f_{3n-4+i} est également $n-1+i$. Il est facile de voir que dans ces conditions, on peut mettre

$$(x_2x_3x_4)^{n-2-i}$$

en évidence. Nous écrirons donc

$$f_{3n-4+i} = (x_2x_3x_4)^{n-2-i}\bar{f}_{4i-2}(x_2, x_3, x_4).$$

L'équation

$$f_{3n-4+i} = 0$$

doit représenter un cône passant $2n-3$ fois par O_1O_2, O_1O_3, O_1O_4, donc

$$\bar{f}_{4i+2} = 0$$

représente un cône passant $2i+1$ fois par ces droites. Pour rappeler ce fait, nous écrirons le terme envisagé sous la forme

$$x_1^{3n-4-i}(x_2x_3x_4)^{n-2-i}f_{4i+2}^{(2i+1)}.$$

On obtient ainsi les termes de l'équation des surfaces Φ pour $i=0, 1, \ldots, n-2$. En particulier, pour $i=0$, on a le terme

$$x_1^{3n-4}(x_2x_3x_4)^{n-2}f_2^{(1)}.$$

Le cône tangent à une surface Φ en O_1 se compose donc des faces du tétraèdre de référence comptées chacune $n-2$ fois et d'un cône du second ordre circonscrit au trièdre formé par ces faces

Si l'on exprime que le cône $f_{4n-5}=0$ passe $2n-3$ fois par les droites O_1O_2, O_1O_3, O_1O_4, on trouve que son équation s'écrit

$$f_{4n-5}^{(2n-3)} = 0.$$

Considérons maintenant les derniers termes de l'équation de Φ et précisément le terme

$$x_1^{2n-k-3}(x_2x_3x_4)^k\bar{f}_{4n-2k-5}.$$

Le coefficient de x_1^{2n-k-3}, égalé à zéro, doit représenter un cône passant $2n-3$ fois par O_1O_2, O_1O_3, O_1O_4. Ceci est réalisé, quel que soit $\bar{f}_{4n-2k-5}$, si $2k > 2n-3$, c'est-à-dire $k \geqslant n-1$.

Si $k < n - 1$, le cône $\bar{f}_{4n-2k-5}$ doit passer $2n - 3 - 2k$ fois par les droites O_1O_2, O_1O_3, O_1O_4. On posera donc

$$\bar{f}_{4n-2k-5} = f^{(2n-2k-3)}_{4n-2k-5}, \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, n - 2.$$

5. Nous sommes maintenant en mesure d'écrire l'équation des adjointes Φ à la surface F. Nous avons précisément

$$\begin{aligned} &\sum_0^{n-2} x_1^{3n-4-i}(x_2x_3x_4)^{n-2-i} f^{(2i-1)}_{4i+2} \\ &+ x_1^{2n-3} f^{(2n-3)}_{4n-5} + \sum_1^{n-2} x_1^{2n-k-3}(x_2x_3x_4)^k f^{(2n-2k-3)}_{4n-2k-5} \\ &+ \sum_{n-1}^{2n-3} x_1^{2n-k-3}(x_2x_3x_4)^k f^{(0)}_{4n-2k-5} = 0. \end{aligned}$$

Comme vérification, si l'on fait $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ ou $x_4 = 0$ dans cette équation, par exemple $x_2 = 0$, on doit trouver un terme de la forme

$$(x_1x_3x_4)^{2n-3}(a_1x_1 + a_3x_3 + a_4x_4).$$

Ces termes sont

$$x_1^{2n-2} f^{(2n-3)}_{4n-6}(0, x_3, x_4) + x_1^{2n-3} f^{(2n-3)}_{4n-5}(0, x_3, x_4).$$

On a bien

$$f^{(2n-3)}_{4n-1}(0, x_3, x_4) = a_1(x_3x_4)^{2n-3},$$

$$f^{(2n-3)}_{4n-5}(0, x_3, x_4) = (x_3x_5)^{2n-3}(a_3x_3 + a_4x_4).$$

D'autre part, les termes contenant x_2 à la plus haute puissance sont donnés par

$$x_1^{n-1}(x_2x_3x_4)^{n-2} f^{(1)}_{2n-1} + x_1^{n-2}(x_2x_3x_4)^{n-1} f^{(0)}_{2n-2}.$$

Dans $f^{(1)}_{2n-1}$, il y a deux termes en $x_2^{2n-2}x_3$, $x^{2n-2}x_4$ et dans $f^{(0)}_{2n-3}$, un terme en x_2^{2n-3}. On trouve donc les termes

$$x_2^{3n-4}(x_1x_3x_4)^{n-2}(a'_1x_1x_3 + a'_2x_1x_4 + a'_3x_3x_4),$$

c'est-à-dire une expression analogue au terme, en x_1^{3n-4}.

Il est aisé de compter le nombre des surfaces Φ linéairement indépendantes. On trouve le nombre

$$4n^3 - 6n^2 + 3n - 1 = (n-1)(4n^2 - 2n + 1).$$

Le genre arithmétique de la surface F est égal à ce nombre. Observons que deux surfaces F se rencontrant suivant une courbe en général irréductible, donc ces surfaces sont régulières.

Les genres arithmétique et géométrique de la surface F *sont égaux à*

$$p_a = p_g = (n-1)(4n^2 - 2n + 1).$$

Remarquons que pour $n = 1$, auquel cas F est la surface d'Enriques, on trouve $p_a = p_g = 0$.

6. Coupons la surface Φ par le plan $x_1 = \lambda x_2$ et projetons la section du point O_1 sur le plan $x_1 = 0$. Après suppression du facteur x_2^{2n-3}, on obtient la courbe d'ordre $4n-5$, d'équation

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{0}^{n-2} \lambda^{3n-4-i} x_2^{2n-2i-3}(x_3x_4)^{n-2-i} f_{4i+2}^{(2i+1)} \\ &\quad + \lambda^{2n-3} f_{4n-5}^{(2n-3)} + \sum_{1}^{n-2} \lambda^{2n-k-3}(x_3x_4)^k f_{4n-2k-5}^{(2n-2k-3)} \\ &\quad + \sum_{n-1}^{2n-3} \lambda^{2n-k-3}(x_3x_4)^k f_{(0)}^{4n-2k-5} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Le point O_2 est multiple d'ordre $2n-3$ pour cette courbe et le coefficient de x_2^{2n-2} dans cette équation est

$$\sum_{0}^{n-2} \lambda^{3n-4-i}(x_3x_4)^{n-2-i} a_{2i+1}(x_3, x_4) + \lambda^{2n-3} a_{2n-3}(x_3, x_4)$$
$$+ \sum_{1}^{n-2} \lambda^{2n-k-3} a_{2n-3}(a_3, x_4),$$

où nous représentons par a_j une forme de degré j en x_3, x_4.

En égalant cette expression à 0, on obtient les projections des plans tangents à la courbe section considérée à partir du point O_1. Ces plans tangents varient avec λ et avec les coefficients de l'équation de Φ, donc les surfaces Φ ne se raccordent pas en général le long des arêtes du tétraèdre de référence.

Deux surfaces Φ ont en commun, en dehors des arêtes du tétraèdre de référence, une courbe Δ d'ordre

$$(6n-8)^2 - 6(2n-3)^2 = 12n^2 - 24n + 10.$$

7. Désignons par $\varphi(x_2, x_3, x_4)$ une forme quadratique et opérons, sur les surfaces Φ, la transformation

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \varphi(y_2, y_3, y_4) : y_1y_2 : y_1y_3 : y_1y_4.$$

Il leur correspond les surfaces

$$\begin{aligned}&(y_2y_3y_4)^{n-2}\varphi^{3n-4}f_2^{(1)} + y_1(y_2y_3y_4)^{n-3}\varphi^{3n-5}f_6^{(\cdot)} + \\ &+ \dots + y_1^{n-2}\varphi^{2n-2}f_{4n-1}^{(2n-3)} + y_1^{n-1}\varphi^{2n-3}f_{4n-5}^{(2n-3)} \\ &+ \sum_{1}^{n-2} y_1^{n-k-1}(y_2y_3y_4)^k\varphi^{2n-k-3}f_{4n-2k-5}^{(2n-2k-3)} \\ &+ \sum_{n-1}^{2n-3} y_1^{n-k-1}(y_2y_3y_4)^k\varphi^{2n-k-3}f_{4n-2k-5}^{(0)} = 0.\end{aligned}$$

Au domaine du point O_1 correspondent les points du plan $y_1 = 0$. Les surfaces précédentes passent $n-2$ fois par chacune des droites $y_1 = y_2 = 0$, $y_1 = y_3 = 0$, $y_1 = y_4 = 0$. Par conséquent, le point O_1 est multiple d'ordre $3n-4$ pour les surfaces Φ et celles-ci possèdent, dans le domaine du premier ordre de ce point, trois droites infiniment voisines multiples d'ordre $n-2$, situées dans les faces du tétraèdre de référence.

8. Reprenons l'équation (3) de la courbe projetant de O_1 sur $x_1 = 0$ la section d'une surface Φ par le plan $x_1 = \lambda x_2$.

Comme nous l'avons vu, le point O_2 est multiple d'ordre $2n-3$ pour cette courbe. Les points O_3, O_4 sont multiples d'ordre

$$3n-4-(2n-3) = n-1.$$

Les termes en x_3^{3n-4} dans l'équation (3) sont donnés par

$$\lambda^{n-1}(x_3x_4)^{n-2}f_{2n-1}^{(1)}, \qquad \lambda^{n-2}(x_3x_4)^{n-1}f_{2n-3}^{(0)}.$$

Le coefficient de x_3^{3n-4} est formé du facteur x_4^{n-2} et d'un facteur linéaire en x_2, x_4, variable avec les coefficients de l'équation (3). Comme on l'a vu, le point infiniment voisin de O_3 sur la droite $x_4 = 0$ est multiple d'ordre $n-2$ pour la courbe (3). On a des conclusions analogues pour le point O_4.

Cela étant, deux courbes (3) se coupent, en dehors des points O_2, O_3, O_4, en $(4n-5)^2 - (2n-3)^2 - 2(n-1)^2 - 2(n-2)^2 = 8n^2 - 16n + 6$ points.

Par conséquent, une courbe Δ s'appuie en

$$12n^2 - 24n + 10 - (8n^2 - 16n + 6) = 4n^2 - 8n + 4 \text{ points}$$

sur chacune des arêtes du tétraèdre de référence.

Supposons que les courbes Δ passent x fois par chacun des sommets du tétraèdre de référence. Ces courbes s'appuyent alors en

$$4n^2 - 8n + 4 - 2x$$

points variables sur chacune des arêtes du tétraèdre de référence.

La transformation T faisant correspondre à une courbe Δ une courbe de même ordre, les surfaces cubiques circonscrites en tétraèdre de référence doivent rencontrer une courbe Δ en $12n^2 - 24n + 10$ points variables. On doit donc avoir.

$$2(12n^2 - 24n + 10) - 6(4n^2 - 8n + 4 - 2x) - 8x = 0,$$

d'où $x = 1$.

Les courbes Δ passent donc simplement par les points O_1, O_2, O_3, O_4 et s'appuyent en $4n^2 - 8n + 2$ points sur chacune des arêtes du tétraèdre de référence.

9. Nous pouvons maintenant évaluer le degré du système canonique ; il est égal au nombre de points, d'intersection variables d'une courbe Δ avec la surface F.

La plus haute puissance de x_1 figurant dans l'équation de F est $3n$, donc, la surface étant d'ordre $6n$, O_1, et de même O_2, O_3, O_4 sont multiples d'ordre $3n$ pour la surface F. Cela étant, si $p^{(1)}$ est le genre linéaire de F, on a

$$p^{(1)} - 1 = 6n(12n^2 - 24n + 10) - 12n(4n^2 - 8n + 2) - 12n$$
$$= 24n(n-1)^2.$$

La surface F *est de genres*

$$p_a = p_g = (n-1)(4n^2 - 2n + 1), \quad p^{(1)} = 24n(n-1)^2 + 1.$$

10. Supposons maintenant que, dans l'équation de la surface F, on ait

$$\psi_{2n}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \varphi_{2n}(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

La surface F est alors transformée en elle-même par T. Voyons si elle peut passer par des points unis de cette transformation.

Les points unis de T sont au nombre de huit et ont pour coordonnées l'unité prise avec le signe + ou —.

On voit tout d'abord sans peine que la surface F ne passe pas par les points (1, 1, 1, 1), (1, 1, — 1, — 1), (1, — 1, 1, — 1), (1, — 1, — 1, 1) si la surface $\varphi_{2n} = 0$ ne contient pas ces points, ce que nous supposerons.

On a d'autre part

$$\varphi_{2n}(1, -1, -1, -1) = \varphi_{2n}(-1, 1, 1, 1),$$

donc si n est impair, la surface F contient le point (— 1, 1, 1, 1) et de même les points (1, — 1, 1, 1), (1, 1, — 1, 1), (1, 1, 1, — 1).

Supposons n pair, posons $n = 2\nu$ et considérons la surface F d'équation

$$\varphi_{4\nu}(x_2x_3x_4, x_3x_4x_1, x_4x_1x_2, x_1x_2x_3) + (x_1x_2x_3x_4)^{2\nu}\varphi_{4\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

Sur cette surface, T détermine une involution du second ordre privée de points unis, dont nous désignerons par F_1 une image.

Le système adjoint $|\Phi|$ à F est dans le cas actuel transformé en lui-même par T et contient deux systèmes linéaires $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$, de dimensions r_1, r_2, composés au moyen de l'involution. On a

$$r_1 + r_2 + 2 = p_a = (2\nu - 1)(16\nu^2 - 4\nu + 1).$$

Aux systèmes découpés sur F par $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$ correspondent sur F_1 deux systèmes linéaires complets dont l'un est le système canonique.

Si p'_a est le genre arithmétique de F_1, on a

$$p_a + 1 = 2(p'_a + 1),$$

d'où

$$p'_a = \nu(16\nu^2 - 12\nu + 3).$$

La surface F_1 est évidemment régulière et on a d'autre part, pour le genre linéaire $p'^{(1)}$ de cette surface,

$$p'^{(1)} = 24\nu(2\nu - 1)^2 + 1.$$

On peut d'autre part prendre pour F_1 la surface normale obtenue en rapportant projectivement les surfaces Φ_1 aux hyperplans d'un espace linéaire à $r_1 = p'_a - 1$ dimensions. Le modèle projectif de F_1 ainsi obtenu est un modèle canonique. Nous désignerons par Γ_1 les courbes canoniques de F_1, qui en sont donc actuellement les sections hyperplanes.

Le système $|\Phi_2|$ a la dimension

$$r_2 = p_a - p'_a - 1 = 16\nu^3 - 12\nu^2 + 3\nu - 2 = p'_a - 2.$$

Aux courbes découpées sur F par les surfaces Φ_2 correspondent sur F_1 des courbes Γ_2 de genre $24\nu(2\nu^2 - 1) + 1$, formant un système linéaire de degré $24\nu(2\nu - 1)^2$ et de dimension $p'_a - 2$. On a

$$|2\Gamma_1| = |2\Gamma_2|.$$

Le diviseur Severi de F_1 est donc $\sigma = 2$.

Nous obtenons donc *une surface canonique dont le diviseur de Severi est $\sigma = 2$ et dont les genres sont*

$$p_a = p_g = \nu(16\nu^2 - 12\nu + 3),$$
$$p^{(1)} = 24\nu(2\nu - 1)^2 + 1.$$

11. Supposons maintenant $n = 2\nu + 1$. La surface F, d'équation

$$\varphi_{4\nu-2}(x_2x_3x_4,\ x_3x_4x_1,\ x_4x_1x_2,\ x_1x_2x_3)$$
$$+ (x_1x_2x_3x_4)^{2\nu-1}\varphi_{4\nu-2}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = 0.$$

passe maintenant par les points unis

$A_1(-1, 1, 1, 1)$, $A_2(1, -1, 1, 1)$, $A_3(1, 1, -1, 1)$, $A_4(1, 1, 1, -1)$,

qui sont d'ailleurs simples pour la surface.

Sur cette surface, T détermine une involution du second ordre présentant quatre points unis. Soit F_2 une surface image de cette involution.

Le genre arithmétique p'_a de F_2 est donné par

$$12(p_a + 1) = 24(p'_a + 1) - 12,$$

d'où

$$p'_a = \nu(16\nu^2 - 12\nu + 3).$$

Le genre linéaire $p'^{(1)}$ de F_2 est

$$p'^{(1)} = 48\nu(2\nu^2 + 1) - 1.$$

La surface F_2 est régulière. En rapportant projectivement ses courbes canoniques aux hyperplans d'un espace à $p'_a - 1$ dimensions, on obtient une surface canonique possédant quatre points doubles coniques aux points de diramation de la correspondance entre F_2 et F. Le diviseur de Severi de la surface F_2 n'est plus nécessairement égal à deux.

12. On peut également considérer la surface F obtenue en posant

$$\psi_{2n}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = -\varphi_{2n}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4).$$

Quel que soit n, cette surface passe, simplement, par les points $B_1(1, 1, 1, 1)$, $B_2(1, 1, -1, -1)$, $B_3(1, 1, 1, -1)$, $B_4(1, -1, -1, 1)$. Elle passe par les points A_1, A_2, A_3, A_4 si n est pair ; elle ne passe pas par ces points si n est impair.

Dans tous les cas, la surface F est transformée en soi par T et l'involution engendrée sur la surface par cette transformation possède quatre points unis si n est impair ($n = 2\nu + 1$), huit si n est pair ($n = 2\nu$).

Dans ce dernier cas, la surface image de l'involution a le genre arithmétique p'_a donné par

$$12[(2\nu - 1)(16\nu^2 - 4\nu + 1) + 1] = 24(p'_a + 1) - 24\,;$$

d'où

$$p'_a = \nu(16\nu^2 - 6\nu + 3).$$

Liège, le 8 juillet 1953.