Sur la sixième congruence de cubiques gauches de M. Stuyvaert (*); par Lucien Godeaux, à Liége.

Dans son beau mémoire (**) couronné par l'Académie royale, M. Stuyvaert a signalé une congruence linéaire de cubiques gauches représentée par l'évanouissement de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1 a_x + \alpha_2 b_x + \alpha_3 c_x & \alpha_1 a'_x + \alpha_2 b'_x + \alpha_3 c'_x & \alpha_1 a''_x + \alpha_2 b''_x + \alpha_3 c''_x \\ \alpha_1 d_x + \alpha_2 c_x & \alpha_1 d'_x + \alpha_2 c'_x & \alpha_1 d''_x + \alpha_2 c''_x \end{matrix} \right\| = 0,$$

a_x, b_x, ... étant douze formes linéaires en x_1, x_2, x_3, x_4 et α_1, α_2, α_3 des paramètres homogènes.

Les cubiques gauches de cette congruence sont évidemment assujetties à dix conditions; M. Stuyvaert n'en a signalé que neuf, ajoutant que la dixième était probablement une condition de contact. Nous avons recherché quelle était cette condition et nous demandons à l'Académie la permission d'exposer les résultats auxquels nous sommes parvenu.

1. — Soit une courbe gauche du sixième ordre et de genre trois dont les points rendent nulle la matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a'_x & b'_x & c'_x & d'_x \\ a''_x & b''_x & c''_x & d''_x \end{matrix} \right\| = 0. \qquad (1)$$

(*) Extrait des *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), n° 6, pp. 693-699, 1909.

(**) *Cinq études de géométrie analytique* (VI-230 pp.). Gand, Van Goethem, 1908, pp. 104, 114 et 117.

Par cette courbe passent quatre surfaces cubiques linéairement indépendantes, et deux surfaces cubiques quelconques contenant la courbe se rencontrent encore suivant une cubique gauche octosécante de la courbe (1) (*).

Par la cubique gauche représentée par

$$\left\| \begin{matrix} c_x & c'_x & c''_x \\ d_x & d'_x & d''_x \end{matrix} \right\| = 0 \qquad (2)$$

passent ∞^1 surfaces cubiques contenant la courbe (1). L'équation d'une quelconque de ces surfaces peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & o & o \\ a_x & b_x & c_x & d_x \\ a'_x & b'_x & c'_x & d'_x \\ a''_x & b''_x & c''_x & d''_x \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

2. — Entre les points de la cubique gauche (2) et le faisceau des surfaces cubiques (3) établissons une correspondance $(1,n)$. Pour exprimer analytiquement cette correspondance, remarquons que les surfaces cubiques

$$\begin{vmatrix} o & o & k_3 & k_4 \\ a_x & b_x & c_x & d_x \\ a'_x & b'_x & c'_x & d'_x \\ a''_x & b''_x & c''_x & d''_x \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

rencontrent la cubique (2) en un seul point variable, donc l'expression analytique de la correspondance sera

$$k_3 = \varphi_1(\lambda_1,\ \lambda), \qquad k_4 = \varphi_2(\lambda_1,\ \lambda_2),$$

(*) STUYVAERT, *loc. cit.*, pp. 27-36.

φ_1 et φ_2 étant des formes homogènes d'ordre n en $\lambda_1\ \lambda_2$.

Les cubiques gauches passant par les points de la cubique (2) et situées sur les surfaces cubiques (3) correspondantes engendrent une congruence Γ.

Cette congruence est linéaire, car par un point générique de l'espace passe une surface (3) et à cette surface ne correspond qu'un point de (2); de plus, les cubiques gauches de (3) passant par ce dernier point forment un faisceau linéaire et par le point de l'espace choisi ne passe qu'une courbe de ce faisceau.

Recherchons les équations d'une cubique gauche de Γ. Le point correspondant sur (2) à la surface (3) est donné par les équations (2) et

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \varphi_1 & \varphi_2 \\ a_x & b_x & c_x & d_x \\ a'_x & b'_x & c'_x & d'_x \\ a''_x & b''_x & c''_x & d''_x \end{vmatrix} = 0,$$

et le faisceau de cubiques gauches situé sur la surface (3) sera découpé par le système de surfaces

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^{n-1}\lambda_3 & 0 & \varphi_1 & \varphi_2 \\ a_x & b_x & c_x & d_x \\ a'_x & b'_x & c'_x & d'_x \\ a''_x & b''_x & c''_x & d''_x \end{vmatrix} = 0,$$

où λ_3 est un paramètre variable. Par conséquent, une cubique gauche de la congruence Γ sera représentée par l'évanouissement de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_1^{n-1}\lambda_3 & a_x & a'_x & a''_x \\ \lambda_2 & o & b_x & b'_x & b''_x \\ o & \varphi_1 & c_x & c'_x & c''_x \\ o & \varphi_2 & d_x & d'_x & d''_x \end{matrix} \right\| = 0. \quad (5)$$

3. — Cherchons à représenter les équations (5) sous forme d'une matrice à deux lignes et trois colonnes, par exemple

$$\left\| \begin{matrix} k_1a_x + k_2b_x + k_3c_x + k_4d_x & \Sigma k_1a'_x & \Sigma k_1a''_x \\ k'_1a_x + k'_2b_x + k'_3c_x + k'_4d_x & \Sigma k'_1a'_x & \Sigma k'_1a''_x \end{matrix} \right\| = 0. \quad (6)$$

De la matrice (5) on déduit que la cubique générique de Γ est l'intersection partielle des deux surfaces cubiques

$$\lambda_1\varphi_1 \begin{vmatrix} b_x & b'_x \\ d_x & d'_x \end{vmatrix} - \lambda_1\varphi_2 \begin{vmatrix} b_x & b'_x \\ c_x & c'_x \end{vmatrix} + \lambda_1^{n-1}\lambda_2\lambda_3 \begin{vmatrix} c_x & c'_x \\ d_x & d'_x \end{vmatrix}$$

$$- \lambda_2\varphi_1 \begin{vmatrix} a_x & a'_x \\ d_x & d'_x \end{vmatrix} + \lambda_2\varphi_2 \begin{vmatrix} a_x & a'_x \\ c_x & c'_x \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda_1\varphi_1 \begin{vmatrix} b_x & b''_x \\ d_x & d''_x \end{vmatrix} - \lambda_1\lambda_2 \begin{vmatrix} b_x & b''_x \\ c_x & c''_x \end{vmatrix} + \lambda_1^{n-1}\lambda_2\lambda_3 \begin{vmatrix} c_x & c''_x \\ d_x & d''_x \end{vmatrix}$$

$$- \lambda_2\varphi_1 \begin{vmatrix} a_x & a''_x \\ d_x & d''_x \end{vmatrix} + \lambda_2\varphi_2 \begin{vmatrix} a_x & a''_x \\ c_x & c''_x \end{vmatrix} = 0.$$

De (6) on déduit que la cubique gauche représentée par l'évanouissement de cette matrice est l'intersection partielle des deux surfaces cubiques :

$$(k_1k_2' - k_1'k_2)\begin{vmatrix} a_x & a_x' \\ b_x & b_x' \end{vmatrix} + (k_1k_3' - k_1'k_3)\begin{vmatrix} a_x & a_x' \\ c_x & c_x' \end{vmatrix}$$

$$+ (k_1k_4' - k_1'k_4)\begin{vmatrix} a_x & a_x' \\ d_x & d_x' \end{vmatrix} + (k_2k_3' - k_2'k_3)\begin{vmatrix} b_x & b_x' \\ c_x & c_x' \end{vmatrix}$$

$$+ (k_2k_4' - k_2'k_4)\begin{vmatrix} b_x & b_x' \\ d_x & d_x' \end{vmatrix} + (k_3k_4' - k_3'k_4)\begin{vmatrix} c_x & c_x' \\ d_x & d_x' \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Sigma(k_1k_2' - k_1'k_2)\begin{vmatrix} a_x & a_x'' \\ b_x & b_x'' \end{vmatrix} = 0.$$

En identifiant, on trouve

$$\frac{k_1}{\lambda_2\varphi_1} = \frac{k_2}{\lambda_1\varphi_1} = \frac{k_3}{-\lambda_1^{n-1}\lambda_2\lambda_3} = \frac{k_4}{0},$$

$$\frac{k_1'}{0} = \frac{k_2'}{0} = \frac{k_3'}{\varphi_2} = \frac{k_4'}{-\varphi_1}.$$

Par conséquent, la congruence Γ est formée de toutes les cubiques gauches qui rendent nulle la matrice.

$$\left\| \begin{matrix} \lambda_2\varphi_1 a_x + \lambda_1\varphi_1 b_x - \lambda_1^{n-1}\lambda_2\lambda_3 c_x & \lambda_2\varphi_1 a_x' + \lambda_1\varphi_1 b_x' - \lambda_1^{n-1}\lambda_2\lambda_3 c_x' & \lambda_2\varphi_1 a_x'' + \lambda_1\varphi_1 b_x'' - \lambda_1^{n-1}\lambda_2\lambda_3 c_x'' \\ \varphi_2 c_x - \varphi_1 d_x & \varphi_2 c_x' - \varphi_1 d_x' & \varphi_2 c_x'' - \varphi_1 d_x'' \end{matrix} \right\| = 0. \quad (7)$$

4. — Posons

$$\varphi_1 = \lambda_2, \quad \varphi_2 = -\lambda_1$$

et

$$\lambda_1 = \alpha_2, \qquad \lambda_2 = \alpha_1, \qquad \lambda_3 = -\alpha_3.$$

La matrice (7) devient

$$\begin{Vmatrix} \alpha_1 a_x + \alpha_2 b_x + \alpha_3 c_x & \alpha_1 a'_x + \alpha_2 b'_x + \alpha_3 c'_x & \alpha_1 a''_x + \alpha_2 b''_x + \alpha_3 c''_x \\ \alpha_1 d_x + \alpha_2 c_x & \alpha_1 d'_x + \alpha_2 c'_x & \alpha_1 d''_x + \alpha_2 c''_x \end{Vmatrix} = 0, \quad (8)$$

ce qui est la congruence VI de M. Stuyvaert.

Passons à la recherche de la dixième condition. Remarquons que les surfaces (*)

$$\begin{gathered} |b_x \ c_x \ d_x| \times |d_x \ a_x \ b_x| - |c_x \ d_x \ a_x| \times |a_x \ b_x \ c_x| = 0 \\ |b_x \ c_x \ d_x| \times |d_y \ a_y \ b_y| - |c_x \ d_x \ a_x| \times |a_y \ b_y \ c_y| = 0 \end{gathered} \quad (9)$$

se touchent en un point (y) situé sur la cubique gauche (2). En effet, dans les deux cas le plan tangent est

$$\sum_{i=1}^{4} x_i \left[|d_y \ a_y \ b_y| \frac{\partial}{\partial y_i} |b_y \ c_y \ d_y| - |a_y \ b_y \ c_y| \frac{\partial}{\partial y_i} |c_y \ d_y \ a_y| \right] = 0,$$

car on a

$$|b_y \ c_y \ d_y| = 0, \qquad |c_y \ d_y \ a_y| = 0.$$

Les cubiques gauches de la congruence (8), qui sont

(*) Les déterminants sont dénotés par leur première ligne.

situées sur la surface (9), passent par le point commun à la cubique gauche (2) et à la surface

$$| d_x \ a_x \ b_x | \times | a_y \ b_y \ c_y | - | a_x \ b_x \ c_x | \times | d_y \ a_y \ b_y | = 0.$$

Or, ce point ne peut être que le point (y) lui-même, car si l'on remplace (x) par les y dans l'équation précédente, elle est identiquement nulle.

Les cubiques de la congruence VI de M. Stuyvaert touchent le long de la cubique directrice une surface du sixième ordre passant doublement par la sextique directrice.

Liége, le 26 avril 1909.

Bruxelles. — Imprimerie HAYEZ, rue de Louvain, 112.