Separatabdruck aus „Monatshefte für Mathematik u. Physik". XX. Jahrg. 1909.

Sur une coïncidence bicubique.

Par **Lucien Godeaux** à Liège.

Dans cette note, nous nous proposons d'étudier une coïncidence représentée par l'évanouissement d'une matrice de formes biquaternaires; nous utilisons pour cela les méthodes de M. Stuyvaert.[1])

1. Designons par x_i, u_i $(i = 1, \ldots, 4)$ les coordonnées courantes respectivement ponctuelles et tangentielles, et représentons par

$$a_x\, u_\alpha$$

une forme doublement linéaire en x et en u.

La matrice dont l'évanouissement donne lieu à la coïncidence que nous voulons étudier est la suivante:

$$\left\| \begin{matrix} a_x\, u_\alpha & b_x\, u_\beta & c_x\, u_\gamma \\ a'_x\, u_\alpha, & b'_x\, u_\beta, & c'_x\, u_\gamma, \end{matrix} \right\| = 0. \tag{1}$$

Pour abréger le discours, nous désignerons cette coïncidence par la lettre M.

M est d'ordre et de classe trois, car si dans la matrice (1) nous supposons les u fixes, nous avons une cubique gauche; si au contraire ce sont les x qui sont constants, nous avons une développable de la troisième classe.

2. Aux plans d'une droite correspondent ∞^1 cubiques gauches engendrant une surface. Recherchons l'ordre d'une telle surface, la droite étant donnée par les plans de coordonnées v_i, w_i $(i = 1, \ldots, 4)$; les coordonnées d'un plan quelconque passant par la droite sont de la forme

$$k\, v_i + k'\, w_i \qquad (i = 1, \ldots, 4). \tag{2}$$

Il est evident que le nombre cherché est égal au nombre d'éléments point-plan dont le point se trouve sur une droite donnée et dont le plan passe par une autre droite; si y_i, z_i $(i = 1, \ldots, 4)$ sont les coordonnées de deux points de la première droite, un point quelconque aura pour coordonnées

$$\lambda\, y_i + \lambda' z_i \qquad (i = 1, \ldots, 4). \tag{3}$$

---

[1]) „Cinq Études de Géometrie Analytique". Gand, Librairie Van Goethem, 1908.

Aux coordonnées courantes substituons dans (1) les coordonnées (2) et (3). Il vient:

$$(4)\qquad \left\| \begin{matrix} (\lambda a_y + \lambda' a_z)(k v_\alpha + k' w_\alpha) & (\lambda b_y + \lambda' b_z)(k v_\beta + k' w_\beta) \\ (\lambda a'_y + \lambda' a'_z)(k v_{\alpha'} + k' w_{\alpha'}) & (\lambda b'_y + \lambda' b'_z)(k v_{\beta'} + k' w_{\beta'}) \end{matrix} \right.$$
$$\left. \begin{matrix} (\lambda c_y + \lambda' c_z)(k v_\gamma + k' w_\gamma) \\ (\lambda c'_y + \lambda' c'_z)(k v_{\gamma'} + k' w_{\gamma'}) \end{matrix} \right\| = 0.$$

Faisons les substitutions

$$\lambda = \sigma \rho_1, \ \lambda' = \sigma \rho_3, \ k = \tau \rho_2, \ k' = \tau \rho_3,$$

σ et τ étant des facteurs convenablement choisis. La matrice (4) devient:

$$\left\| \begin{matrix} (\rho_1 a_y + \rho_3 a_z)(\rho_2 v_\alpha + \rho_3 w_\alpha) & (\rho_1 b_y + \rho_3 b_z)(\rho_2 v_\beta + \rho_3 w_\beta) \\ (\rho_1 a'_y + \rho_3 a'_z)(\rho_2 v_{\alpha'} + \rho_3 w_{\alpha'}) & (\rho_1 b'_y + \rho_3 b'_z)(\rho_2 v_{\beta'} + \rho_3 w_{\beta'}) \end{matrix} \right.$$
$$\left. \begin{matrix} (\rho_1 c_y + \rho_3 c_z)(\rho_2 v_\gamma + \rho_3 w_\gamma) \\ (\rho_1 c'_y + \rho_3 c'_z)(\rho_2 v_{\gamma'} + \rho_3 w_{\gamma'}) \end{matrix} \right\| = 0.$$

Cette matrice s'annule pour douze systèmes de valeurs des ρ, mais il faut en décompter trois fois le système $(\rho_1 = \rho_3 = 0)$ et trois fois le système $(\rho_2 = \rho_3 = 0)$.

Aux plans passant par une droite correspondent les points d'une surface du sixième ordre.

3. Recherchons le lieu des points tels que les développables qui leur correspondent aient deux de leurs plans passant par la droite commune aux deux plans de coordonnées v_i et w_i $(i = 1, \ldots, 4)$. Si ω est une variable, il faut exprimer que les équations suivantes ont deux solutions $\frac{k}{k'}$ communes:

$$a_x (k v_\alpha + k' w_\alpha) + \omega a'_x (k v_{\alpha'} + k' w_{\alpha'}) = 0$$
$$b_x (k v_\beta + k' w_\beta) + \omega b'_x (k v_{\beta'} + k' w_{\beta'}) = 0$$
$$c_x (k v_\gamma + k' w_\gamma) + \omega c'_x (k v_{\gamma'} + k' w_{\gamma'}) = 0.$$

On a

$$\left\| \begin{matrix} a_x v_\alpha & a_x w_\alpha & a'_x v_{\alpha'} & a'_x w_{\alpha'} \\ b_x v_\beta & b_x w_\beta & b'_x v_{\beta'} & b'_x w_{\beta'} \\ c_x v_\gamma & c_x w_\gamma & c'_x v_{\gamma'} & c'_x w_{\gamma'} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Donc: Le lieu des points qui correspondent à la fois à deux plans passant par une droite fixe est une courbe gauche d'ordre six et de genre trois.

4. Recherchons le nombre de cubiques gauches passant par un point fixe (y_i, $i = 1, \ldots, 4$) et rencontrant une seconde fois une droite passant par ce point et par un second point (z_i, $i = 1, \ldots, 4$).

La condition pour que la cubique gauche passe par le point (y_i) est

$$
\left\| \begin{array}{ccc} a_y\, u_\alpha & b_y\, u_\beta & c_y\, u_\gamma \\ a'_y\, u_{\alpha'} & b'_y\, u_{\beta'} & c'_y\, u_{\gamma'} \end{array} \right\| = 0. \tag{5}
$$

La condition pour que la cubique gauche ait une bisécante (y_i, z_i) est exprimée par

$$
\left\| \begin{array}{cccc} a_y\, u_\alpha & a'_y\, u_{\alpha'} & a_z\, u_\alpha & a'_z\, u_{\alpha'} \\ b_y\, u_\beta & b'_y\, u_{\beta'} & b_z\, u_\beta & b'_z\, u_{\beta'} \\ c_y\, u_\gamma & c'_y\, u_{\gamma'} & c_z\, u_\gamma & c'_z\, u_{\gamma'} \end{array} \right\| = 0. \tag{6}
$$

Les équations (5) et (6) représentent un nombre fini de plans (u) qui est le nombre cherché. Les matrices (5) et (6) s'annulent respectivement par les plans d'une développable de troisième classe et d'une développable de sixième classe et de genre trois. Ces développables appartiennent à deux surfaces de troisième classe dont elles forment l'intersection, donc: *Il y a huit cubiques gauches passant par un point fixe et rencontrant une seconde fois une droite passant par ce point.*

5. Occuppons nous des cubiques dégénérées. Les plans auxquels correspondent ces cubiques enveloppent une surface dont nous allons rechercher la classe. Désignons par

$$
[u_\alpha\, u_\beta\, u_\gamma\, u_{\alpha'}\, (a\, b\, c\, a')], \ldots
$$

les déterminants

$$
\left| \begin{array}{cccc} a_1\, u_\alpha & a_2\, u_\alpha & a_3\, u_\alpha & a_4\, u_\alpha \\ b_1\, u_\beta & b_2\, u_\beta & b_3\, u_\beta & b_4\, u_\beta \\ c_1\, u_\gamma & c_2\, u_\gamma & c_3\, u_\gamma & c_4\, u_\gamma \\ a'_1\, u_{\alpha'} & a'_2\, u_{\alpha'} & a'_3\, u_{\alpha'} & a'_4\, u_{\alpha'} \end{array} \right|, \ldots
$$

Exprimons que l'invariant de la cubique gauche correspondant à un plan (u) est nul.[1])

$$
(7) \quad \left| \begin{array}{ll} u_\alpha u_\beta u_\gamma u_{\alpha'}\, (a\, b\, c\, a') & u_\alpha u_\beta u_{\alpha'} u_{\gamma'}\, (a\, b\, a'\, c') - u_\alpha u_\gamma u_{\alpha'} u_{\beta'}\, (a\, c\, a'\, b') \\ u_\alpha u_\beta u_\gamma u_{\beta'}\, (a\, b\, c\, b') & u_\alpha u_\gamma u_{\alpha'} u_{\beta'}\, (a\, c\, a'\, b') - u_\alpha u_\beta u_{\beta'} u_{\gamma'}\, (a\, b\, b'\, c') \\ u_\alpha u_\beta u_\gamma u_{\gamma'}\, (a\, b\, c\, c') & u_\beta u_\gamma u_{\beta'} u_{\gamma'}\, (b\, c\, b'\, c') - u_\beta u_\gamma u_{\alpha'} u_{\gamma'}\, (b\, c\, a'\, c') \end{array} \right.
$$

$$
\left. \begin{array}{l} u_\alpha u_{\alpha'} u_{\beta'} u_{\gamma'}\, (a\, a'\, b\, c') \\ u_\beta u_{\alpha'} u_{\beta'} u_{\gamma'}\, (b\, a'\, b\, c') \\ u_\gamma u_{\alpha'} u_{\beta'} u_{\gamma'}\, (c\, a\, b'\, c') \end{array} \right| = 0.
$$

[1]) Stuyvaert, *Sur l'invariantologie de la cubique gauche*. Bull. de l'Acad. R. de Belgique — 1907.

Les plans auxquels correspondent des cubiques gauches dégénérées enveloppent une surface de classe douze.

Une cubique dégénère en une droite et une conique. Le plan de cette conique a pour équation, moyennant (7).

$$\begin{vmatrix} u_\alpha u_\beta u_\gamma u_{\alpha'} (a b c a') & u_\alpha u_{\alpha'} u_{\beta'} u_{\gamma'} (a a' b' c') & a_x \\ u_\alpha u_\beta u_\gamma u_{\beta'} (a b c b') & u_\beta u_{\alpha'} u_{\beta'} u_{\gamma'} (b a' b' c') & b_x \\ u_\alpha u_\beta u_\gamma u_{\gamma'} (a b c c') & u_\gamma u_{\alpha'} u_{\beta'} u_{\gamma'} (c a' b' c') & c_x \end{vmatrix} = 0.$$

Recherchons l'enveloppe de ces plans lorsque (u) enveloppe (7). Il faut rechercher le nombre de plans (u) qui satisfait à l'équation (7) et aux équations

$$\left\| \begin{matrix} u_\alpha u_\beta u_\gamma u_{\alpha'} (a b c a') & u_\alpha u_{\alpha'} u_{\beta'} u_{\gamma'} (a a' b' c') & a_y & a_z \\ u_\alpha u_\beta u_\gamma u_{\beta'} (a b c b') & u_\beta u_{\alpha'} u_{\beta'} u_{\gamma'} (b a' b' c') & b_y & b_z \\ u_\alpha u_\beta u_\gamma u_{\gamma'} (a b c c') & u_\gamma u_{\alpha'} u_{\beta'} u_{\gamma'} (c a' b' c') & c_y & c_z \end{matrix} \right\| = 0.$$

Ces dernières représentent une développable de classe 33, le nombre de solutions est donc 396.

Les plans des coniques qui font partie des cubiques gauches dégénérées enveloppent une surface de classe 396.

6. Au moyen des calculs développés dans le dernier travail cité de M. Stuyvaert, on pourait établir les théorèmes suivants, que nous nous contenterons d'énoncer.

Le lieu des plans (u) auxquels correspondent des cubiques gauches tangentes à un plan donné, est une surface de classe six.

Le lieu des plans (u) auxquels correspondent des cubiques gauches osculant un plan fixe, est une développable de classe vingt-sept.