Une généralisation des surfaces desmiques

Lucien Godeaux

Résumé
Construction d’un faisceau de surfaces algébriques contenant trois surfaces dégénérées en quatre parties. Examen d'un cas particulier où les surfaces de ce faisceau sont irrégulières.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Une généralisation des surfaces desmiques [1],

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Construction d'un faisceau de surfaces algébriques contenant trois surfaces dégénérées en quatre parties. Examen d'un cas particulier où les surfaces de ce faisceau sont irrégulières.

Partons de l'équation d'une quadrique tangente aux arêtes du tétraèdre de référence. Si l'on y remplace les coordonnées par leurs carrés, on obtient une surface desmique du quatrième ordre, c'est-à-dire une surface appartenant à un faisceau contenant trois surfaces dégénérées en quatre plans.

Dans l'équation de la quadrique, remplaçons les coordonnées courantes par une puissance paire $2n$ de ces coordonnées. Nous obtenons une surface F d'ordre $4n$ appartenant à un faisceau contenant trois surfaces dégénérées : L'une est formée des plans du tétraèdre de référence comptés chacun n fois ; chacune des autres est formée de quatre surfaces d'ordre n. La surface F apparaît donc comme une généralisation d'une surface desmique.

La surface F possède $12n$ tacnodes singuliers si $n > 2$; $12n$ tacnodes ordinaires si $n = 2$ et 12 points doubles coniques si $n = 1$.

Nous considérons plus particulièrement le cas $n = 2$. La surface F a alors l'irrégularité deux.

1. L'équation d'une quadrique tangente aux arêtes du tétraèdre de référence peut, moyennant un choix convenable du point unitaire, s'écrire sous la forme

(1) Communication faite au III. Osterreichischer Mathematiker Kongress de Salzbourg, septembre 1952.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4 = 0.$$

Remplaçons dans cette équation les coordonnées courantes par leurs puissances d'ordre $2n$ et posons

$$\Phi_n = x_1^{4n} + x_2^{4n} + x_3^{4n} + x_4^{4n} - 2(x_1x_2)^{2n} - 2(x_1x_3)^{2n} - 2(x_1x_4)^{2n} - 2(x_2x_3)^{2n} - 2(x_2x_4)^{2n} - 2(x_3x_4)^{2n}.$$

Observons que si nous posons

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n, \\ \varphi_2 &= x_1^n - x_2^n + x_3^n + x_4^n, \\ \varphi_3 &= x_1^n + x_2^n - x_3^n + x_4^n, \\ \varphi_4 &= x_1^n + x_2^n + x_3^n - x_4^n, \end{aligned}$$

nous avons identiquement

$$\Phi_n + \varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4 = 8(x_1x_2x_3x_4)^n. \tag{1}$$

Si d'autre part nous posons

$$\begin{aligned} \psi_1 &= x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n, \\ \psi_2 &= x_1^n + x_2^n - x_3^n - x_4^n, \\ \psi_3 &= x_1^n - x_2^n + x_3^n - x_4^n, \\ \psi_4 &= x_1^n - x_2^n - x_3^n + x_4^n, \end{aligned}$$

nous avons identiquement

$$\Phi_n - \psi_1\psi_2\psi_3\psi_4 = -8(x_1x_2x_3x_4)^n. \tag{2}$$

Par conséquent, nous avons identiquement

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4 + \psi_1\psi_2\psi_3\psi_4 = 16(x_1x_2x_3x_4)^n. \tag{3}$$

2. Cela étant, la surface F, d'équation $\Phi_n = 0$, est d'ordre $4n$ et appartient à un faisceau qui contient trois surfaces dégénérées :

a) une surface $(x_1x_2x_3x_4)^n = 0$, formée de quatre plans comptés chacun n fois ;

b) une surface $\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4 = 0$, dégénérée en quatre surfaces d'ordre n ;

c) une surface $\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4 = 0$, dégénérée en quatre surfaces d'ordre n.

La base de ce faisceau est constituée par une courbe d'ordre $16n^2$ dégénérée en 16 courbes planes d'ordre n comptées chacune n fois. Pour déterminer ces courbes, écrivons l'équation de la surface F sous la forme

$$2\Phi_n = \psi_1\psi_2\psi_3\psi_4 - \varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4 = 0.$$

Si nous désignons par $(\varphi_i\psi_k)$ l'intersection des surfaces $\varphi_i = 0$, $\psi_k = 0$, on voit que la courbe-base du faisceau se compose des 16 courbes $(\varphi_i\psi_k)$. Observons que chacune de ces courbes est située dans une des faces du tétraèdre de référence. Les équations des courbes $(\varphi_1\psi_1)$, $(\varphi_2\psi_2)$, $(\varphi_3\psi_3)$, $(\varphi_4\psi_4)$, par exemple, sont respectivement

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & x_2^n + x_3^n + x_4^n &= 0, \\ x_1 &= 0, & -x_2^n + x_3^n + x_4^n &= 0, \\ x_1 &= 0, & x_2^n - x_3^n + x_4^n &= 0, \\ x_1 &= 0, & x_2^n + x_3^n - x_4^n &= 0. \end{aligned}$$

De même, dans le plan $x_2 = 0$, se trouvent les courbes $(\varphi_1\psi_2)$, $(\varphi_2\psi_1)$, $(\varphi_3\psi_4)$, $(\varphi_4\psi_3)$; dans le plan $x_3 = 0$, les courbes $(\varphi_1\psi_3)$, $(\varphi_3\psi_1)$, $(\varphi_2\psi_4)$, $(\varphi_4\psi_2)$; enfin dans le plan $x_4 = 0$, les courbes $(\varphi_1\psi_4)$, $(\varphi_4\psi_1)$, $(\varphi_2\psi_3)$, $(\varphi_3\psi_2)$.

Si nous prenons l'équation de F soit sous la forme (1), soit sous la forme (2), on voit que le long de la courbe $(\varphi_1\psi_1)$ par exemple, la surface F et les surfaces $\varphi_1 = 0$, $\psi_1 = 0$ ont un contact d'ordre $n - 1$. Il en est de même le long des autres courbes.

La surface F *appartient à un faisceau contenant trois surfaces dégénérées en quatre parties et dont la base est constituée par* 16 *courbes planes d'ordre* n *le long de chacune desquelles il y a contact d'ordre* n — 1 *entre les surfaces du faisceau.*

Chacune des surfaces φ, ψ *coupe la surface* F *suivant quatre courbes planes et il y a contact d'ordre* n — 1 *entre ces surfaces le long de ces courbes.*

3. Les intersections de la surface F avec la droite $x_3 = x_4 = 0$ sont données par

$$(x_1^{2n} - x_2^{2n})^2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0,$$

ou encore par

$$(x_1^n - x_2^n)^2\,(x_1^n + x_2^n)^2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$$

La surface F rencontre donc la droite envisagée en $2n$ points distincts. On vérifie aisément que ces points sont doubles pour la surface.

Supposons en premier lieu $n > 1$ et envisageons un des points précédents, par exemple le point P de coordonnées $1, \epsilon, 0, 0$, où ϵ est une racine d'ordre n de l'unité ($\epsilon^n = 1$). Le cône tangent en ce point à la surface a pour équation

$$(\epsilon x_1 - x_2)^2 = 0.$$

P est donc un point double uniplanaire dont le plan tangent passe par l'arête opposée du tétraèdre de référence. Nous allons montrer que ce point est un tacnode, singulier si $n > 2$; précisément, c'est un point double auquel sont infiniment voisines successives $n - 1$ droites doubles.

Observons que les surfaces $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\psi_3 = 0$, $\psi_4 = 0$ ont également pour plan tangent au point P le plan $\epsilon x_1 - x_2 = 0$.

Considérons une courbe rationnelle γ passant par le point P et soient

$$\begin{aligned}
\rho x_1 &= 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{n-1} t^{n-1} + a_n t^n + \dots,\\
\rho x_2 &= \epsilon + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_{n-1} t^{n-1} + b_n t^n + \dots,\\
\rho x_3 &= \phantom{\epsilon + {}} c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1} + c_n t^n + \dots,\\
\rho x_4 &= \phantom{\epsilon + {}} d_1 t + d_2 t^2 + \dots + d_{n-1} t^{n-1} + d_n t^n + \dots
\end{aligned}$$

ses équations paramétriques. Le point P est obtenu pour $t = 0$. Pour que la courbe γ ait un contact d'ordre $n - 1$ avec la surface $\varphi_1 = 0$ au point P, par exemple, il faut que l'on ait

$$b_1 = a_1\epsilon, \quad b_2 = a_2\epsilon, \ \dots, \ b_{n-1} = a_{n-1}\epsilon.$$

Cela étant, nous écrirons les équations de la courbe γ sous la forme

$$\rho x_1 = \alpha + t^n \mathrm{A}, \ \rho x_2 = \alpha\epsilon + t^n \mathrm{B}, \ \rho x_3 = t\mathrm{C}, \ \rho x_4 = t\mathrm{D}. \qquad (4)$$

Cherchons maintenant le nombre de points de rencontre de la courbe γ avec la surface F confondus en P. Un calcul simple montre que dans le développement du premier membre de l'équation de la surface, où l'on a remplacé les coordonnées courantes par les expressions (4), le terme de degré le moins élevé en t est le terme en t^{2n}. Notre affirmation en résulte, puisque toute courbe rationnelle issue de P et ayant un contact d'ordre $n-1$ en ce point avec la surface $\varphi_1 = 0$, rencontre F en $2n$ points confondus en P.

On arrive à des conclusions analogues pour les autres points doubles de F situés sur la droite $x_3 = x_4 = 0$ et, plus généralement, pour les points doubles de la surface situés sur les autres arêtes du tétraèdre de référence.

La surface F *possède, pour* $n > 1$, $12n$ *tacnodes situés* $2n$ *par* $2n$ *sur les six arêtes du tétraèdre de référence. En chacun de ces points, le plan tangent passe par l'arête opposée du tétraèdre et la surface possède* $n-1$ *droites doubles infiniment voisines successives au point double.*

4. Lorsque l'on a $n = 1$, les conclusions sont différentes.

La surface F, du quatrième ordre, rencontre la droite $x_3 = x_4 = 0$ en deux points doubles $(1, 1, 0, 0)$, $(1, -1, 0, 0)$.

Le cône tangent au premier de ces points à la surface a pour équation

$$(x_1 - x_2)^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$$

et au second,

$$(x_1 + x_2)^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0.$$

La surface possède donc dans ce cas douze points doubles coniques se répartissant par couples sur les arêtes du tétraèdre de référence.

5. Le faisceau auquel appartient la surface F peut être représenté par l'équation

$$\Phi_n + \lambda(x_1x_2x_3x_4)^n = 0 \tag{5}$$

et les surfaces réductibles appartenant à ce faisceau sont obtenues en faisant $\lambda = \pm 8$ ou en faisant tendre λ vers l'infini.

Il est bien clair que la surface générique irréductible de ce faisceau possède les mêmes propriétés et les mêmes singularités que la surface F.

Pour $n = 1$, on obtient un faisceau de surfaces du quatrième ordre contenant trois surfaces dégénérées en quatre plans ;

c'est ce que G. Humbert a appelé un faisceau de *surfaces desmiques* (1). Pour $n > 1$, on obtient un faisceau de surfaces que l'on peut appeler *surfaces desmiques généralisées.*

6. Supposons dans ce qui précède $n = 2$ et considérons une surface F irréductible du faisceau (5). C'est une surface du huitième ordre possédant 24 points tacnodaux ordinaires.

On sait (Castelnuovo) que les adjointes à une surface passent simplement par un tacnode. Actuellement, les adjointes d'ordre $n - 4$ sont donc des surfaces du quatrième ordre passant simplement par les 24 tacnodes.

Supposons en premier lieu que ces adjointes ne passent pas par les arêtes du tétraèdre de référence. Elles sont représentées par une équation qui contient les termes en x_1^4, x_2^4, x_3^4, x_4^4. Lorsque l'on fait $x_3 = x_4 = 0$ dans cette équation, elle doit se réduire à $x_1^4 - x_2^4 = 0$, lorsque l'on fait $x_2 = x_4 = 0$, elle doit se réduire à $x_1^4 - x_3^4 = 0$, lorsque l'on fait $x_1 = x_4 = 0$, elle doit se réduire à $x_2^4 - x_3^4 = 0$, ce qui est impossible. On en conclut que les adjointes à F sont les surfaces du quatrième ordre circonscrites au tétraèdre de référence ; elles forment un système linéaire de dimension 12 et le genre géométrique de F est $p_g = 13$.

D'autre part, la dimension virtuelle de ce système est $34 - 24 = 10$ et le genre arithmétique de F est $p_a = 11$.

La surface F, *du huitième ordre* (n = 2), *a l'irrégularité deux.*

Dans un travail ultérieur, nous étudierons le cas $n > 2$.

Liège, le 18 juin 1952.

(1) G. Humbert, *Sur la surface desmique du quatrième ordre* (Journal de Liouville, 1891, pp. 353-398). Une de nos élèves a remarqué que pour $n = 1$, la surface étudiée ici était une surface desmique. Voir D. Adam, *Sur deux surfaces du quatrième ordre* (Bull. Soc. Sc. de Liège, 1951, pp. 39-47).