Sur quelques points de diramation de seconde espèce et de troisième catégorie d'une surface multiple (Deuxième communication)

Lucien Godeaux

Résumé
Étude d'un point de diramation quintuple pour la surface multiple, le cône tangent se décomposant en trois plans et un cône du second ordre et la surface possédant deux-points doubles biplanaires ordinaires infiniment voisins du point de diramation.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur quelques points de diramation de seconde espèce et de troisième catégorie d'une surface multiple,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(Deuxième communication)

Résumé. — Étude d'un point de diramation quintuple pour la surface multiple, le cône tangent se décomposant en trois plans et un cône du second ordre et la surface possédant deux-points doubles biplanaires ordinaires infiniment voisins du point de diramation.

Dans cette seconde note ([1]), nous démontrons l'existence d'un point de diramation quintuple pour la surface multiple Φ, le cône tangent se décomposant en un plan (σ_1), un cône du second ordre $((\tau_1)$, un plan (τ_2) et un plan (σ_2). Le cône (τ_1) coupe les plans (σ_1), (τ_2) chacun suivant une droite et les plans (τ_2), (σ_2) se coupent suivant une droite. La surface Φ possède deux points doubles biplanaires ordinaires, infiniment voisins du point de diramation, l'un situé sur la droite commune à (σ_1) et à (τ_1), l'autre situé sur la droite commune aux plans (σ_2), (τ_2).

1. Nous considérons sur une surface F une involution cyclique I, d'ordre premier $p = 101$ et nous désignons par Φ la surface normale image de l'involution construite comme il a été indiqué dans notre *mémoire sur les surfaces multiples* ([2]). Fixons l'attention sur un point uni O de I en lequel on a $\alpha = 79$ et par conséquent $\beta = 78$.

([1]) La première note est parue dans le Bulletin d'août 1952 de l'Académie.
([2]) Mémoires in-8° de l'Académie roy. de Belgique, 1952.

Nous devons en premier lieu chercher les solutions en nombres positifs λ, μ des congruences

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \quad \mu + \beta\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p)$$

telles que $\lambda + \mu < p$. On trouve aisément

$$\begin{array}{lll}
\lambda = 9 - 4t, & \mu = 5 + 9t, & (t = 0, 1), \\
\lambda = 22 - 4t, & \mu = 1 + 9t, & (t = 0, 1, \ldots, 5), \\
\lambda = 44 - 4t, & \mu = 2 + 9t, & (t = 0, 1, \ldots, 10), \\
\lambda = 66 - 4t, & \mu = 3 + 9t, & (t = 0, 1, \ldots, 6), \\
\lambda = 31 - 4t, & \mu = 6 + 9t, & (t = 0, 1, \ldots, 7), \\
\lambda = 53 - 4t, & \mu = 7 + 9t, & (t = 0, 1, \ldots, 6), \\
\lambda = 75 - 4t, & \mu = 8 + 9t, & (t = 0, 1, 2, 3), \\
\lambda = 18 - 4t, & \mu = 10 + 9t, & (t = 0, 1, \ldots, 4), \\
\lambda = 88 - 4t, & \mu = 4 + 9t, & (t = 0, 1).
\end{array}$$

Il y a, d'après la théorie, 50 solutions.

2. Nous conservons les notations de nos travaux antérieurs.

Le système $|C_0'|$ correspond à la solution $\lambda_1 = 9$, $\mu_1 = 5$. Les courbes C_0' ont donc en O la multiplicité 14 et le comportement de ces courbes en ce point est fixé par le schéma suivant :

$$O^{14},\ (2,1)^5,\ (2,2)^5,\ (2,3)^2,\ (2,4)^1 \ldots,\ (2,78)^1$$

$$\begin{array}{lll}
 & (1,1)^9 & (2,3,1)^1, \\
(1,2,3)^2,\ (1,2,2)^2,\ (1,2,1)^2, & (1,2)^3, & (2,3,2)^1, \\
 & (1,3)^1, & (2,3,3)^1. \\
 & \vdots & \\
 & (1,77)^1. &
\end{array}$$

Soit O' le point de diramation qui correspond sur Φ au point O. Sur la surface Φ_1, projection de Φ à partir de O', il correspond aux points unis de première espèce (1,77), (1, 2, 3), (2, 3, 3), (2, 78) respectivement une droite σ_1, une conique τ_1, une droite τ_2 et une droite σ_2. Le point O est quintuple pour la surface Φ et le cône tangent en ce point s'obtient en projetant de O les courbes σ_1, τ_1, τ_2, σ_2. D'ailleurs si n est l'ordre de la surface Φ, le système $|C_0|$ a le degré $101n$ et on vérifie que $|C_0'|$ a le degré $101(n-5)$.

3. Le système $|C''_0|$ correspond à la solution $\lambda_2 = 5$, $\mu_2 = 14$. Les courbes C''_0 ont en O la multiplicité 19 et leur comportement en ce point est fixé par le schéma

$$\begin{array}{rl} & O^{19}, (2,1)^5, (2,2)^1, \ldots, (2,78)^1. \\ (1,1)^5, & (2,1,1)^1, \\ (1,2,3)^1, (1,2,2)^1, (1,2,1)^1, (1,2)^2, & (2,1,2)^1, \\ (1,3)^1, & (2,1,3)^1, (2,1,3,1)^1, \\ & (2,1,3,2)^1; (2,1,3,3)^1. \\ \vdots & \\ (1,77)^1. & \end{array}$$

Le système $|C''_0|$ a le degré 101 $(n-6)$, de sorte que sur la surface Φ_1, les courbes Γ''_0 homologues des courbes C''_0 sont découpées par les hyperplans passant par le point O'_1, commun à τ_1 et à τ_2. Ce point est simple pour la surface Φ_1.

Sur la surface Φ_2, projection de Φ_1 à partir du point O'_1, nous avons une droite σ_1, une droite τ_1, une droite g_1 qui représente le domaine du point (2, 1, 3, 3), et une droite σ_2. La droite g_1 s'appuie en un point sur la droite τ_1 et en un point sur σ_2. Ce dernier point d'appui représente la courbe τ_2 et est nécessairement singulier pour la surface. La droite g_1 est d'ailleurs une droite exceptionnelle.

4. Retournons à la surface Φ_1. On sait que les courbes σ_1, τ_1 se rencontrent en un point O'_{11} et les droites, τ_2, σ_2 en un point O'_{12}. Ces points peuvent être simples ou doubles pour la surface.

Nous supposerons que le point O'_{11} est équivalent à un ensemble de courbes rationnelles.

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_t,$$

de degrés virtuels -2, chacune de ces courbes rencontrant la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontrant pas les autres. De plus, ρ_1 rencontre σ_1 en un point et ρ_t rencontre τ_1 en un point. Si $t = 0$, O'_{11} est simple pour la surface ; si $t = 1$, O'_{11} est un point double conique ; si $t = 2$, c'est un point double biplanaire ordinaire, ...

Nous supposerons de même que le point O'_{12} est équivalent à une suite de courbes rationnelles de degrés virtuels -2,

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_u,$$

analogue à la précédente, ω_1 rencontrant τ_2 en un point et ω_u rencontrant σ_2 en un point.

Sous ces hypothèses, nous avons

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma'_0 + \sigma_1 + \rho_1 + \ldots + \rho_t + \tau_1 + \tau_2 + \omega_1 + \ldots \\ + \omega_u + \sigma_2.$$

On en conclut que les courbes $\sigma_1, \tau_1, \tau_2, \sigma_2$ ont respectivement les degrés virtuels -2, -4, -3, -2.

Sur la surface Φ_1, nous avons établi qu'il existe des courbes Γ_1 rencontrant σ_1 en un point, ne rencontrant pas les autres courbes du domaine de O′ et satisfaisant à l'équation fonctionnelle

$$p\Gamma_0 \equiv p\Gamma_1 + h_1\sigma_1 + m_1\rho_1 + \ldots + m_t\rho_t + k_1\tau_1 \\ + k_2\tau_2 + n_1\omega_1 + \ldots + n_u\omega_u + h_2\sigma_2,$$

les h, m, k, n étant des entiers.

En exprimant que les courbes Γ_1 ne rencontrent pas les courbes σ_2, ω, τ_2, τ_1, ρ et rencontrent σ_1 en un point, on trouve

$$n_{u-i} = (i+1)h_2, \quad k_2 = (u+2)h_2, \quad k_1 = (2u+5)h_2,$$
$$m_{t-i} = [(5i+7)u + 13i + 18]h_2, \quad h_1 = [(5t+7)u + 13t + 18]h_2,$$
$$h_2[5tu + 13t + 12u + 31] = 101.$$

On en conclut $h_2 = 1$ et

$$5tu + 13t + 12u = 70.$$

Par conséquent, on a $t = 2$, $u = 2$ et *les points* O'_{11}, O'_{12} *sont doubles biplanaires ordinaires pour la surface* Φ_1.

Nous pourrions nous arrêter ici, cependant, il convient de voir quel est le comportement des courbes C'''_0, $C^{(4)}_0$, ... au point O et celui des courbes homologues Γ'''_0, $\Gamma^{(4)}_0$, ... sur la surface Φ vis-à-vis des courbes σ_1, ρ_1, ρ_2, τ_1, τ_2, ω_1, ω_2, σ_2.

5. Les courbes C'''_0 correspondent aux valeurs $\lambda_3 = 22$, $\mu_3 = 1$. Elles passent 23 fois par O et leur comportement en ce point a pour schéma

$$\begin{array}{lll} & & O^{23},\ (2,\ 1)^1,\ \dots,\ (2,78)^1. \\ (1,\ 1,\ 20)^1,\ \dots,\ (1,\ 1,\ 1)^1, & (1,\ 1)^2, & \\ & (1,\ 2)^1, & \\ & \vdots & \\ & (1,77)^1. & \end{array}$$

Sur la surface Φ_1, les courbes Γ_0''' sont découpées par les hyperplans touchant en O_1' la conique τ_1. Sur la surface Φ_3, il existe une droite σ_1 et une droite σ_2, une droite exceptionnelle g_2 qui représente le domaine du point (1, 1, 20).

Observons que la droite exceptionnelle g_1 correspond au point O_1' commun à τ_1, τ_2 et la droite exceptionnelle g_2 au point de la conique τ_1 infiniment voisin de O_1'.

Sur Φ_3, la droite g_2 rencontre σ_1 en un point qui représente τ_1 et σ_2 en un point qui représente τ_2.

Passant aux courbes $C_0^{(4)}$, qui correspondent aux solutions $\lambda_4 = 1$, $\mu_4 = 23$. Ces courbes ne peuvent plus passer par le point (2, 78) et par conséquent sur la surface Φ_1, les courbes $\Gamma_1^{(4)}$ sont découpées par les hyperplans passant par la droite τ_2. Observons que les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ étant des courbes Γ_0''' particulières, doivent rencontrer la conique τ_1 en deux points confondus en O_1'. Il en résulte que la partie variable des courbes $\Gamma_0^{(4)}$ passe par O_1'. Par suite, les courbes $C_0^{(4)}$ passent par le point (2, 1, 3, 3). Cela étant, le schéma du comportement des courbes $C_0^{(4)}$ en O est

$$\begin{array}{lllll} & O^{24},\ (2,\ 1)^{14}, & (2,\ 2)^{10},\ (2,\ 3)^4, & (2,4)^2,\ \dots,\ (2,\ 27)^2, & (2,\ 28)^1, \\ (1,\ 1)^1, & (2,\ 1,\ 1)^1, & (2,\ 3,\ 1)^2, & & (2,\ 28,\ 1)^1. \\ \vdots & (2,\ 1,\ 2)^1, & (2,\ 3,\ 2)^2, & & \\ (1,77)^1. & (2,\ 1,\ 3)^1, & (2,\ 3,\ 3)^2. & & \\ & & (2,\ 1,\ 3,\ 1)^1,\ \dots,\ (2,\ 1,\ 3,\ 3)^1. & & \end{array}$$

Sur Φ_1, les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ ne rencontrent pas la courbe ω_1, mais elles rencontrent ω_2 en un point. La courbe ω_2 correspond donc au point (2, 28, 1).

Sur la surface Φ_4, projection de la surface Φ_3 à partir du point O_3' commun à g_2 et à σ_2, nous avons une droite σ_1, une droite exceptionnelle g_1 s'appuyant en un point représentant τ_1 sur σ_1, une conique τ_2, que nous indiquerons par τ_2^2, une droite ω_2 contenant un point représentant la droite σ_2.

Les courbes $\Gamma^{(4)}$ satisfont à la relation fonctionnelle

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(4)} + \sigma_1 + \rho_1 + \rho_2 + \tau_1 + 2(\tau_2 + \omega_1 + \omega_2) + \sigma_2.$$

6. Les courbes $C_0^{(5)}$ correspondent à la solution $\lambda_1 = 18$, $\mu_1 = 10$; elles ont en O la multiplicité 28 et ne peuvent plus passer par le point (1, 77). Sur Φ_1, les hyperplans découpant les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ ne peuvent plus rencontrer la droite σ_1 en un point variable. Par conséquent, ces hyperplans passent par la conique τ_1 et, puisque ce sont des courbes $\Gamma_0^{(4)}$ particulières, par la droite τ_1.

Le schéma du comportement des courbes $C_0^{(5)}$ au point O est

$$\begin{array}{rll}
 & O^{28},\ (2,1)^{10},\ (2,2)^{10},\ (2,3)^{4},\ (2,4)^{2},\ \ldots,\ (2,27)^{2},\ (2,28)^{1}, & \\
 & \qquad\qquad\quad (1,1)^{18},\ (2,3,1)^{2}, & (2,28,1)^{1} \\
(1,2,3)^{4},\ \ldots,\ (1,2,1)^{4}, & \qquad\qquad\quad (1,2)^{6},\ (2,3,2)^{2}, & \\
 & \qquad\qquad\quad (1,3)^{2},\ (2,3,3)^{2}. & \\
 & \qquad\qquad\qquad \vdots & \\
 & \qquad\qquad\quad (1,26)^{2}, & \\
 & (1,27,1)^{1},\ (1,27)^{1}. &
\end{array}$$

Sur la surface Φ_5, nous avons une droite ρ_1, qui représente le point (1, 27, 1) et qui contient un point représentant σ_1 ; une courbe τ_1 du quatrième ordre, que nous indiquerons par τ_1^4, rencontrent ρ_1 en un point ; une courbe τ_2^2 rencontrant τ_1^4 en un point O_5' (homologue de O_1' sur Φ_1) ; une droite ω_2 rencontrant τ_2^2 en un point et contenant un point représentant σ_1.

Les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ satisfont à l'équation fonctionnelle

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(5)} + \sigma_1 + 2(\rho_1 + \rho_2 + \tau_1 + \tau_2 + \omega_1 + \omega_2) + \sigma_2.$$

7. Dorénavant, nous n'indiquerons plus que les points unis de première espèce appartenant aux courbes $C_0^{(i)}$, sauf lorsqu'il sera nécessaire d'écrire le schéma complet.

Les courbes $C_0^{(6)}$ correspondent à la solution $\lambda_6 = 14$, $\mu_6 = 19$. Elles ont la multiplicité 33 en O et passent par les points

$$(1, 27, 1)^1,\ (1, 2, 3)^3,\ (2, 1, 3, 3)^1,\ (2, 3, 3)^1,\ (2, 28, 1)^1.$$

Sur la surface Φ_5, les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ sont découpées par les hyperplans passant par le point O_5'.

Les courbes $C_0^{(7)}$ correspondent à la solution $\lambda_7 = 31$, $\mu_7 = 6$. Ces courbes passent 37 fois par O et par les points

$$(1,\ 27,\ 1)^1,\ (1,\ 2,\ 3)^2,\ (2,\ 3,\ 3)^1,\ (2,\ 28,\ 1)^1.$$

Sur la surface Φ_5, les courbes $\Gamma_0^{(7)}$ sont découpées par les hyperplans touchant la courbe τ_1^4 en O_1'.

Les courbes $C_0^{(8)}$ sont données par la solution $\lambda_8 = 10$, $\mu_8 = 28$. Elles passent 38 fois par O et par les points

$$(1,\ 27,\ 1)^1,\ (1,\ 2,\ 3)^2,\ (2,\ 1,\ 3,\ 3)^2,\ (2,\ 28,\ 1)^1.$$

Sur la surface Γ_5, les courbes $\Gamma_0^{(8)}$ sont découpées par les hyperplans tangents en O_5' aux courbes τ_1^4, τ_2^2 ; ces courbes ont donc un point double à tangentes variables en O_5', ce qui explique que le point (2, 1, 3, 3) soit double pour les courbes $C_0^{(8)}$.

Les courbes $C_0^{(9)}$ correspondent à la solution $\lambda_9 = 27$, $\mu_9 = 15$; elles ont la multiplicité 42 en O et passent par les points

$$(1, 27, 1)^1, (1, 2, 3)^1, (1, 1, 20)^1, (2, 1, 3, 3)^1, (2, 28, 1)^1.$$

Sur la surface Φ_5, les courbes $\Gamma_0^{(9)}$ ont un point double en O_5' et une de leurs tangentes en ce point coïncide avec la tangente à τ_1^4.

Les courbes $C_0^{(10)}$ sont données par $\lambda_{10} = 6$, $\mu_{10} = 37$. Elles ont la multiplicité 43 en O et passent par les points

$$(1,\ 27,\ 1)^1,\ (1,\ 2,\ 3)^1,\ (2,\ 1,\ 11,\ 1,\ 1)^1,\ (2,\ 28,\ 1)^1.$$

Sur la surface Φ_5, les courbes $\Gamma_0^{(10)}$ ont un point de rebroussement en O_5', la tangente de rebroussement étant la tangente à la courbe τ_1^4.

Observons que sur la surface Φ_9, nous avons une droite ρ_1, une droite τ_1 rencontrant ρ_1, une droite exceptionnelle g_2 rencontrant τ_1 en un point, une droite exceptionnelle g_1 rencontrant g_2 en un point O_9', une droite ω_2 rencontrant g_1 en un point (qui représente τ_2). Sur cette surface, les courbes $\Gamma_0^{(10)}$ sont découpées par les hyperplans passant par le point O_9', simple pour la surface. Sur Φ_{10}, O_9' donne une droite exceptionnelle g_3 qui correspond au point (2, 1, 11, 1, 1).

Les courbes $C_0^{(11)}$ sont données par $\lambda_{11} = 44$, $\mu_{11} = 2$. Elles passent 46 fois par le point O et par les points

$$(1,\ 27,\ 1)^1,\ (1,\ 1,\ 20)^2,\ (2,\ 28,\ 1)^1.$$

Sur Φ_t, les courbes $\Gamma_0^{(11)}$ ont un tacnode en O_5', la tangente tacnodale étant la tangente à la quartique τ_4^1.

Observons que les degrés des systèmes $|\Gamma_0^{(5)}|$, $|\Gamma_0^{(6)}|$, ..., $|\Gamma_0^{(11)}|$ sont respectivement $n-16$, $n-17$, $n-18$, $n-20$, $n-21$, $n-22$, $n-24$. On peut le vérifier soit en considérant le nombre de points absorbés en O_5' dans l'intersection de deux courbes $\Gamma_0^{(6)}$, $\Gamma_0^{(7)}$, ..., $\Gamma_0^{(11)}$, soit en calculant les nombres de points d'intersection de deux courbes $C_0^{(5)}$, $C_0^{(6)}$, ... $C_0^{(11)}$ absorbés en O.

8. Envisageons les courbes $C_0^{(12)}$, qui correspondent à la solution $\lambda_{12} = 23$, $\mu_{12} = 24$. Elles ont en O la multiplicité 47 et ne peuvent plus passer par le point (2, 28, 1). Les courbes $\Gamma_0^{(12)}$ sont par conséquent découpées sur la surface Φ_5 par les hyperplans contenant la conique τ_2^2. Le comportement des courbes $C_0^{(12)}$ au point O est fixé par le schéma

$$\begin{array}{llll}
 & & & O^{47},\ (2,\ 1)^{15},\ (2,\ 2)^{11},\ (2,3)^5,\ (2,4)^3,\ \ldots, \\
 & & & (2,\ 10)^3,\ (2,\ 11)^2,\ (2,\ 11,\ 1)^1,\ (2,11,1,1)^1 \\
(1,\ 1,\ 20)^1,\ \ldots,\ (1,\ 1,\ 1)^1, & (1,\ 1)^3, & (2,\ 1,\ 1)^4, & (2,\ 3,\ 1)^2, \\
 & (1,\ 2)^2, & (2,\ 1,\ 2)^4, & (2,\ 3,\ 2)^2, \\
 & \vdots & (2,\ 1,\ 2)^1, & (2,\ 3,\ 3)^2. \\
 & (1,\ 26)^2, & (2,\ 1,\ 3,\ 1)^1, & (2,\ 1,\ 3,2)^1, \\
 & & & (2,\ 1,\ 3,\ 3)^1. \\
(1,\ 27)\ 1)^1, & (1,\ 27)^1. & &
\end{array}$$

Les courbes $\Gamma_0^{(12)}$ satisfont à la relation fonctionnelle

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(12)} + \sigma_1 + 2(\rho_1 + \rho_2 + \tau_1) + 3(\tau_2 + \omega_1) + 2\omega_2 + 2\sigma_2.$$

Observons cependant que les courbes $\Gamma_0^{(12)}$ ne sont pas les courbes les plus générales satisfaisant à la relation précédente. En effet, ces courbes générales rencontrent τ_1 en trois points et τ_2 en quatre points. Les courbes $\Gamma_0^{(12)}$ sont des courbes $\Gamma_0^{(11)}$ particulières, qui ont un tacnode en O_5' et par conséquent sont découpées par des hyperplans ne rencontrant plus la courbe τ_1^4 en des points variables. Il en résulte que la partie variable des courbes $\Gamma_0^{(12)}$ a un point double en O_5', une des tangentes étant confondue avec la tangente à la courbe τ_1^4.

D'autre part, sur la surface Φ_5, le point commun à la conique τ_2^2 et à la droite ω_2 représente ω_1 ; c'est donc un point double conique et la partie variable des courbes $\Gamma_0^{(12)}$ rencontre ω_1 en un point mais ne rencontre plus ω_2. Le point (2, 11, 1, 1) a donc pour homologue la courbe rationnelle ω_1.

Les courbes $C_0^{(13)}$ correspondent à la solution $\lambda_{13} = 2$, $\mu_{13} = 46$. Elles passent 48 fois par O et par les points

$$(1,\, 27,\, 1)^1,\ (2,\, 1,\, 11,\, 1,\, 1)^1,\ (2,\, 3,\, 3)^2,\ (2,\, 11,\, 1,\, 1)^1.$$

Sur la surface Φ_5, la partie variable des courbes $\Gamma_0^{(13)}$ possède un point de rebroussement en O_5', la tangente de rebroussement étant la tangente à la courbe τ_1^4.

9. Nous terminerons par l'examen des courbes $C_0^{(14)}$, qui correspondent à la solution $\lambda_{14} = 40$, $\mu_{14} = 11$. Elles passent 51 fois par le point O et ne peuvent plus passer par le point (1, 27, 1) ; il en résulte que les courbes $\Gamma_0^{(14)}$ sont découpées sur Φ_5 par les hyperplans contenant la courbe τ_1^4.

Le comportement des courbes $C_0^{(14)}$ au point O est fixé par le schéma suivant :

$$\begin{array}{llll}
 & \multicolumn{3}{l}{O^{31},\ (2,1)^{11},\ (2,2)^{11},\ (2,3)^{5},\ (2,4)^{3},\dots,(2,10)^{3},} \\
 & & & (2,11)^{2}, \\
(1,1,20)^{1},\ \dots,\ (1,1,1)^{1}, & (1,1)^{20}, & (2,3,1)^{2}, & (2,11,1)^{1}, \\
(1,3)^{4},\ (1,2,2)^{4},\ (1,2,1)^{4} & (1,2)^{7}, & (2,3,2)^{2}, & (2,11,1,1)^{1}. \\
 & (1,3)^{3}, & (2,3,2)^{3}. & \\
 & \vdots & & \\
 & (1,9)^{3} & & \\
(1,10,1)^{1}, & (1,10)^{2}. & & \\
(1,10,1,1)^{1}. & & &
\end{array}$$

Les courbes $\Gamma_0^{(14)}$ satisfont à la relation fonctionnelle

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(14)} + \sigma_1 + 2\rho_1 + 3(\rho_2 + \tau_1 + \tau_2 + \omega_1) + 2\omega_2 + \sigma_2,$$

mais ne sont pas les courbes les plus générales satisfaisant à cette relation. Ces dernières rencontrent en effet la courbes τ_1 en huit points et la courbe τ_2 en trois points, mais les courbes $\Gamma_0^{(14)}$ étant des courbes $\Gamma_0^{(13)}$ particulières, doivent toucher la courbe τ_1^4 au point O_5' sur Φ_5.

D'autre part, les courbes $\Gamma_0^{(14)}$ rencontrent en un point la courbe rationnelle ρ_2, qui correspond au domaine du point (1, 10, 1, 1) et ne rencontrent plus la courbe ρ_1.

La surface Φ_{14}, dont les sections hyperplanes sont les courbes $\Gamma_0^{(14)}$, est d'ordre $n - 35$ et contient une droite ρ_2, une courbe τ_4^1 d'ordre quatre, s'appuyent en un point sur ρ_2, une droite exceptionnelle g_2 s'appuyant sur τ_1^4, une conique τ_2^2 s'appuyant sur g_2, une droite ω_1 s'appuyant sur τ_2^2.

Il est aisé de continuer l'examen des courbes $C_0^{(15)}$, $C_0^{(16)}$, ... La structure du point O sur la surface F et celle du point de diramation O' sont maintenant complètement déterminées. Tout au plus rencontrera-t-on encore des points unis de première espèce du domaine de O, donnant des courbes exceptionnelles sur Φ. Envisageons par exemple le système $|C_0^{(50)}|$, qui correspond à la solution $\lambda_{50} = 21$, $\mu_{50} = 79$. Les courbes $C_0^{(50)}$ ont la multiplicité 100 en O et passent simplement par les points unis de première espèce (1, 1, 20), déjà rencontré, et par un point (2, 1, 78) qui donne, sur Φ, une courbe exceptionnelle.

Liège, le 8 août 1952.