Bulletin de la Classe des sciences

Recherches sur les points de diramation de troisième catégorie d’une surface multiple (seconde note)

Lucien Godeaux

Résumé

On considère un point de diramation de seconde espèce et de troisième catégorie d’une surface multiple. Le cône tangent à la surface en ce point se scinde en quatre cônes rationnels $(\sigma\alpha)$, $(\tau\alpha)$, $(\tau\beta)$, $(\sigma\beta)$. Les cônes $(\tau\alpha)$, $(\tau\beta)$ ont une génératrice en commun. On examine le cas où le point infiniment voisin du point de diramation situé sur cette génératrice est simple ou double conique.

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Recherches sur les points de diramation de troisième catégorie d'une surface multiple,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(Seconde note).

Résumé. — On considère un point de diramation de seconde espèce et de troisième catégorie d'une surface multiple. Le cône tangent à la surface en ce point se scinde en quatre cônes rationnels (σ_a), (τ_a), (τ_β), (σ_β). Les cônes (τ_a), $\tau_\beta)$ ont une génératrice en commun. On examine le cas où le point infiniment voisin du point de diramation situé sur cette génératrice est simple ou double conique.

Dans notre première note [1], nous avons considéré le cas où le point infiniment voisin d'un point de diramation sur la génératrice commune aux cônes (τ_a), (τ_β) est double biplanaire. Avant de continuer l'examen de ce cas, nous allons étudier celui où ce point est simple ou double conique.

Soient Φ la surface multiple, A' un point de diramation de seconde espèce et de troisième catégorie, Φ_1 la surface que l'on obtient en projetant Φ de A' sur un hyperplan de l'espace ambiant. Au domaine de A' correspond sur la surface Φ_1 une courbe rationnelle σ_a, une courbe rationnelle τ_a rencontrant σ_a en un point, une courbe rationnelle τ_β rencontrant τ_a en un point mais ne rencontrant pas σ_a, enfin une courbe rationnelle σ_β rencontrant τ_β en un point mais ne rencontrant pas les deux premières courbes. Nous étudions ici le cas où le point commun aux courbes τ_a, τ_β est simple ou double conique pour la surface

[1] BULLETIN DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1953, pp. 1013-1023.

Φ_1. Ce cas est assez facile à traiter et il nous a paru préférable de nous en occuper avant de poursuivre l'étude de l'hypothèse où le point en question est double biplanaire.

1. Dans notre première note, nous avons montré que si le système $|\overline{C}_0''|$ ne coïncide pas avec $|C_0''|$, le point A_1' est double biplanaire pour la surface Φ_1 et l'on a $t \geqslant 2$. Si donc les systèmes précédents coïncident, on a $t < 2$, c'est-à-dire $t = 0$ et le point A_1' est simple pour la surface Φ_1, ou $t = 1$ et le point A_1' est double conique pour la surface Φ_1.

Rappelons que nous avons supposé que dans la suite des systèmes $|C_0''|$, $|C_0''|$, ..., le système $|\overline{C}_0''|$ est rencontré avant le système $|\overline{\overline{C}}_0''|$ (avec lequel il ne peut d'ailleurs pas coïncider). Cela implique l'inégalité

$$(t+1)\lambda_1 + 2M_2 < (t+1)\mu_1 + 2M_1, \tag{1}$$

où nous posons, pour simplifier les notations,

$$M_1 = (u_1 + 1)a_1 + 1, \qquad M_2 = (u_2 + 1)b_2 + 1.$$

Actuellement, nous avons

$$\lambda_2 = \lambda_2' = (t+2)\lambda_1 + M_2, \qquad \mu_2 = \mu_2' = \mu_1 - M_1,$$
$$\lambda_2'' = \lambda_1 - M_2, \qquad \mu_2'' = (t+2)\mu_1 + M_1.$$
$$(t = 0 \text{ ou } 1).$$

Observons que l'on a

$$\lambda_2'' < \lambda_2.$$

On en conclut que les courbes C_0'' passent $\lambda_2 + \mu_2$ fois par A, λ_2 fois par x_2 points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ..., (β, x_2), $\lambda_2'' + y_2$ fois par le point $(\beta, x_2 + 1)$, λ_2'' fois par les points $(\beta, x_2 + 2)$, ..., $(\beta, \theta_\beta - 1)$, $b_2 + (m_2 - 1)(\eta_2 + 1)$ fois par le point (β, θ_β), b_2 fois par les points $(\beta, \theta_\beta + 1)$, ..., $(\beta, \beta - 1)$. Elles passent en outre par un certain nombre de points fixes, infiniment voisins successifs de $(\beta, x_1 + 1)$, dont le dernier sera désigné par R_β.

Si l'on exprime que la somme des multiplicités de ces points est égale à p, on trouve

$$(x_2 + 1)\ (\lambda_2 - \lambda_2'') + y_2 = \mu_2'' - \mu_2. \tag{2}$$

Rappelons que la multiplicité du point R_β pour les courbes C_0'' est égale au plus grand commun diviseur des nombres

$$\lambda_2 - \lambda_2'' - y_1 \qquad \text{et} \qquad y_1,$$

c'est-à-dire des nombres $\lambda_2 - \lambda_2''$ et y_1. Ce plus grand commun diviseur divise également $\mu_2'' - \mu_2$ et inversement, la multiplicité du point R_β pour les courbes C_0'' est égale au plus grand commun diviseur des nombres

$$\lambda_2 - \lambda_2'' \qquad \text{et} \qquad \mu_2'' - \mu_2.$$

2. Supposons le point A_1' simple pour la surface Φ_1, c'est-à-dire $t = 0$. Les relations (1) et (2) deviennent

$$\lambda_1 + 2M_2 < \mu_1 + 2M_1,$$

$$(x_2 + 1)\ (\lambda_1 + 2M_2) + y_1 = \mu_1 + 2M_1.$$

Projetons la surface Φ_1 du point A_1' sur un hyperplan de l'espace ambiant. Nous obtenons une surface Φ_2 sur laquelle aux courbes τ_α, τ_β correspondent des courbes d'ordres $m_1 - 1$, $m_2 - 1$ et au domaine du point A_1' sur Φ_1, une droite γ_1 qui représente également le domaine du point R_β sur F. Le point R_β doit donc être simple par les courbes C_0'' et les nombres

$$\lambda_1 + 2M_2, \quad \mu_1 + 2M_1$$

doivent être premiers entre eux.

3. Supposons maintenant que le point A_1' soit double conique pour la surface Φ_1, c'est-à-dire que nous ayons $t = 1$. Alors, on a

$$\lambda_2 = \lambda_2' = 3\lambda_1 + M_2, \quad \mu_2 = \mu_2' = \mu_1 - M_1,$$

$$\lambda_2'' = \lambda_1 - M_2, \quad \mu_2'' = 3\mu_1 + M_1.$$

Les relations (1) et (2) deviennent

$$\lambda_1 + M_2 < \mu_1 + M_1,$$
$$2(\lambda_1 + M_2)(x_2 + 1) + y_2 = 2(\mu_1 + M_1). \qquad (3)$$

Sur la surface Φ_2, les courbes τ_γ, τ_β ont les ordres $m_1 - 1$, $m_2 - 1$ et au domaine du point A'_1 de Φ_1 correspond une conique γ_2. Cette conique représente le domaine du point R_β de F et ce point doit donc être double pour les courbes C''_0. On voit précisément, par l'équation (3), que y_2 est certainement pair.

D'autre part, nous avons

$$p = 2\lambda_1\mu_1 + M_1\lambda_1 + M_2\mu_1,$$

ce qui peut s'écrire

$$p = \mu_1(\lambda_1 + M_2) + \lambda_1(\mu_1 + M_1).$$

Il en résulte que $2(\lambda_1 + M_2)$, $2(\mu_1 + M_1)$ et y_1 ne peuvent avoir que le facteur 2 en commun, donc R_β est bien double pour les courbes C''_0.

4. Reprenons le cas $t = 0$ et supposons que le système $|C'''_0|$ coïncide avec le système $|\overline{C}'''_0|$. On a donc

$$\lambda_3 = \lambda'_3 = 3\lambda_1 + 2M_2, \quad \mu_3 = \mu'_3 = \mu_1 + 2M_1.$$

Aux courbes C'''_0 correspondent sur la surface Φ_2 les courbes Γ'''_0 découpées par les hyperplans passant par le point A'_2 commun à la courbe τ_α et à la droite γ_1. On a

$$2\lambda_1 + 3M_2 < \mu_1 + 3M_1.$$

Les courbes C'''_0 ne passent plus par le point R_β, mais, puisque A'_2 est nécessairement simple pour Φ_2, elles passent par un point R'_β, simplement, dont le domaine, sur F, correspond à celui du point A'_2 sur Φ_2.

Les courbes C'''_0 passent $\lambda'_3 + \mu'_3$ par A, λ'_3 fois par x'_2 points $(\beta, 1), \ldots, (\beta, x'_2)$, $\lambda''_2 + y'_2$ fois par $(\beta, x'_2 + 1)$, λ''_2 fois par $(\beta, x'_2 + 2), \ldots, (\beta, \theta_\beta - 1)$, $b_2 + (m_2 - 1)(\eta_2 + 1)$ fois par (β, θ_β), b_2 fois par $(\beta, \theta_\beta + 1), \ldots, (\beta, \beta - 1)$. En exprimant que la somme de ces multiplicités est égale à p, on trouve

$$(x'_2 + 1)(2\lambda_1 + 3M_2) + y'_2 = \mu_1 + 3M_1.$$

Les nombres

$$2\lambda_1 + 3M_2, \qquad \mu_1 + 3M_1 \text{ et } y_2'$$

doivent être deux à deux premiers entre eux, puisque R_β' doit être simple pour les courbes C_0''.

5. Supposons au contraire que ce soit le système $|\overline{\overline{C}}{}_2''|$ qui coïncide avec $|C_0'''|$ et que nous ayons donc

$$\lambda_3 = \lambda_2'' = \lambda_1 - M_2, \quad \mu_3 = \mu_2'' = 2\mu_1 + M_1.$$

On doit avoir

$$\mu_1 + 3M_1 < 2\lambda_1 + 3M_2.$$

Sur la surface Φ_2, les courbes Γ_0''' homologues des courbes C_0''' sont découpées par les hyperplans passant par le point A_2'' commun à la courbe τ_β et à la droite γ_1. Les courbes C_2''' ne passent plus par le point R_β, mais vont passer simplement par un point R_α dont le domaine sur F représente celui de A_2'' sur Φ_2.

Les courbes C_0''' passent $\lambda_2'' + \mu_2''$ par A, μ_2'' fois par x_1 points $(a, 1), \ldots, (a, x_1)$, $\mu_2' + y_1$ fois par (a, x_1), μ_2'' fois par les points $(a, x_1 + 1), \ldots, (a, \theta_a - 1)$, $a_1 + (m_1 - 1)(\eta_1 + 1)$ fois par (a, θ_a), a_1 fois par les points $(a, \theta_a + 1), \ldots, (a, a - 1)$. En exprimant que la somme de ces multiplicités égale à p, on trouve

$$(x_1 + 1)(\mu_1 + 2M_1) + y_1 = \lambda_1 + 2M_2.$$

Or, on a supposé, en admettant que $|C_0''|$ coïncide avec $|\overline{C}{}_0''|$,

$$\lambda_1 + 2M_2 < \mu_1 + 2M_1,$$

donc x_1 ne peut être un entier positif.

On voit donc que l'hypothèse $|\overline{C}{}_0''| = |C_0''|$ exclut l'hypothèse $|\overline{\overline{C}}{}_0''| = |C_0'''|$.

6. Supposons maintenant que les systèmes $|C_0'''|, |C_0^{(4)}|, \ldots, |C_0^{(k)}|$ coïncident respectivement avec les systèmes $|\overline{C}{}_0'''|, |\overline{C}{}_0^{(4)}|, \ldots, |\overline{C}{}_0^{(k)}|$, le système $|C_0^{(k+1)}|$ coïncidant avec le système $|\overline{\overline{C}}{}_0''|$. Quelle est la valeur minimum de k ?

On doit tout d'abord avoir

$$(k-1)\lambda_1 + kM_2 < \mu_1 + kM_1,$$
$$\mu_1 + (k+1)M_1 < k_1\lambda + (k+1)M_2.$$

Les courbes $C_0^{(k)}$ passent $(m_1 - k + 1)$ fois par le point P_a. Les courbes $C_0^{(k+1)}$ passent $\lambda_2'' + \mu_2''$ fois par A, μ_2'' fois par x points $(a, 1)$, $(a, 2)$, ..., (a, x), $\mu_k' + y$ fois par $(a, x+1)$, μ_k' fois par les points $(x, x_1 + 2)$, ..., $(a, \theta_a - 1)$, $a_1 + (m_1 - k + 1)$ $(\eta_1 + 1)$ fois par (a, θ_a), a_1 fois par $(a, \theta_a + 1)$, ..., $(a, a-1)$. Écrivons que la somme de ces multiplicités est égal à p. Il vient

$$(x+1)\ (\mu_1 + kM_1) + y_1 = (k-1)\lambda_1 + kM_2.$$

On doit avoir $x > 0$ et on est donc conduit à une absurdité en vertu de la première des inégalités précédentes.

On en conclut que les systèmes $|C_0'''|$, $|C_0^{(4)}|$, ..., $|C_0^{(m_1+1)}|$ coïncident avec les systèmes $|\overline{C}_0'''|$, $|\overline{C}_0^{(4)}|$, ..., $|\overline{C}_0^{(m_1+1)}|$. Le système $|C_0^{(m_1+2)}|$ coïncide avec le système $|\overline{\overline{C}}_0''|$. On a

$$m_1\lambda_1 + (m_1+1)M_2 < \mu_1 + (m_1+1)M_1.$$

Les courbes $C_0^{(m_1+2)}$ passent $\lambda_2'' + \mu_2''$ fois par A, μ_2'' fois par les points $(a, 1)$, ..., (a, x), $\mu_{m_1+1} + y$ fois par le point $(a, x+1)$, μ_{m_1+1} fois par les points $(a, x+2)$, ..., $(a, a-1)$. On en conclut

$$(x+1)\ [\mu_1 + (m_1+1)M_1] + y = m_1\lambda_1 + (m_1+1)M_2.$$

Les nombres

$$\mu_1 + (m_1+1)M_1, \qquad m_1\lambda_1 + (m_1+1)M_2$$

doivent être premiers entre eux.

7. Retournons maintenant au cas où A_1' est double conique pour la surface Φ_1, c'est-à-dire où $t = 1$.

Sur la surface Φ_2, les courbes σ_a, τ_a, τ_β, σ_β ont respectivement les ordres a_1, $m_1 - 1$, $m_2 - 1$, b_2 et il existe une conique γ_2 rencontrant τ_a en un point A_2' et τ_β en un point A_2''.

Aux courbes C_0''' correspondent sur Φ_2 les courbes Γ_0''' découpées par les hyperplans passent soit par A_2', soit par A_2''. Il en résulte que les courbes C_0''' passent une fois par le point R_β et que par conséquent ces courbes ne peuvent coïncider avec les courbes $\overline{\overline{C}}_0'''$; elles coïncident donc avec les courbes $\overline{C}_0'''$.

Les courbes Γ_0''', passant par le point A_2', le domaine de ce point correspond au domaine d'un point R_β' de F qui doit se trouver sur une branche superlinéaire d'origine A des courbes C_0''' et être simple pour ces courbes. Il en résulte que les courbes C_0''' passent $\lambda_3' + \mu_3'$ fois par A_1 λ_3' fois par x_2' points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ..., (β, x_2'), $2\lambda_1 + y_2'$ fois par $(\beta, x_2' + 1)$, $2\lambda_1$ fois par les points $(\beta, x_2' + 2)$, ..., (β, x_2), $\lambda_2'' + \frac{1}{2} y_2$ fois par $(\beta, x_2 + 1)$, λ_2'' fois par $(\beta, x_2 + 2)$, ..., $(\beta, \theta_\beta - 1)$, $b_2 + (m_2 - 1)(\eta_2 + 1)$ fois par (β, θ_β), b_2 fois par $(\beta, \theta_\beta + 1)$, ..., $(\beta, \beta - 1)$. En exprimant que la somme de ces multiplicités est égale à p et en tenant compte des relations précédentes, donnant y_2 et $\eta_2 + 1$, on trouve

$$(x_2' + 1)(\lambda_1 + M_2) + y_2' = \mu_1 + 2M_1.$$

Les nombres $\lambda_1 + M_2$ et $\mu_1 + 2M_1$ doivent être premiers entre eux.

On pourrait poursuivre sans difficulté la détermination des systèmes $|C_0^{(4)}|$, ...

Liège, le 7 décembre 1953.