

---

---

NOUVEAUX TYPES DE CONGRUENCES LINÉAIRES  
DE CUBIQUES GAUCHES;

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

---

L'étude de plusieurs congruences linéaires de cubiques gauches rencontrées par MM. Stuyvaert <sup>(1)</sup> et Veneroni peut être facilitée par l'emploi d'une transformation birationnelle entre deux espaces; en même temps, on découvre d'autres types de congruences linéaires de cubiques gauches; c'est ce que nous voulons montrer dans cette Note.

1. Soient  $\Sigma_1, \Sigma_2$  deux espaces linéaires et ponctuels à trois dimensions superposés ou non, et dans le premier de ces espaces une courbe gauche  $C_1$  d'ordre 6 et de genre 3. On sait que les surfaces cubiques passant par une telle courbe sont en nombre  $\infty^3$  et que trois de ces surfaces cubiques, si elles ne font pas partie d'un même faisceau, se rencontrent encore en un point unique. Deux surfaces cubiques se rencontrent encore suivant une cubique gauche octosécante de la courbe  $C_1$ .

Cela étant, entre les  $\infty^3$  surfaces cubiques passant

---

<sup>(1)</sup> M. STUYVAERT, *Cinq études de Géométrie analytique*, (Prix F. Deruyts). Gand, Van Gøethem, 1908.

par  $C_1$  et les plans de l'espace  $\Sigma_2$ , établissons une collinéation. Par le fait même, on établit une correspondance birationnelle entre les deux espaces  $\Sigma_1, \Sigma_2$ . A un point commun à trois plans de  $\Sigma_2$  on fait correspondre le point commun aux trois surfaces cubiques correspondantes dans  $\Sigma_1$ , et inversement.

Aux points d'une droite de  $\Sigma_2$  correspondent les points d'une cubique gauche de  $\Sigma_1$ , donc aux points d'un plan de  $\Sigma_1$  correspondent les points d'une surface cubique de  $\Sigma_2$ . De même, on voit qu'aux points d'une droite de  $\Sigma_1$  correspondent les points d'une cubique gauche de  $\Sigma_2$ .

Les  $\infty^3$  surfaces cubiques de  $\Sigma_2$  correspondantes aux plans de  $\Sigma_1$  passent par une courbe gauche  $C_2$  du sixième ordre et de genre 3; les  $\infty^4$  cubiques gauches correspondantes aux droites de  $\Sigma_1$  s'appuient huit fois sur  $C_2$ .

A un point d'une courbe  $C$  correspondent dans l'autre espace les points d'une droite, car la courbe  $C$  de cet espace est simple sur la surface cubique transformée d'un plan du premier espace. Ces droites engendrent une surface du huitième ordre, car la transformée d'une droite quelconque d'un espace est une cubique gauche octosécante de la courbe  $C$  de l'autre espace.

Soient  $A$  un point de  $C_1$ ,  $a$  la droite de  $\Sigma_2$  qui correspond à  $A$ . Aux  $\infty^2$  droites passant par  $A$  correspondent  $\infty^2$  cubiques gauches dégénérées en une droite fixe  $a$  et une conique mobile; le nombre de ces coniques étant  $\infty^2$ , elles ne peuvent s'appuyer qu'au plus en cinq points sur  $C_2$ , et par conséquent  $a$  est une trisécante de  $C_2$ .

Ainsi, aux points d'une courbe  $C$  correspondent les trisécantes de l'autre.

La transformation que nous venons de définir a été

étudiée par Cayley (1), Cremona (2) et par MM. Loria (3), Noëther (4) et R. Sturm (5).

2. On obtient aisément l'expression analytique de la transformation. Soient  $x_1, x_2, x_3, x_4$  les coordonnées homogènes courantes de l'espace  $\Sigma_1$ ;  $y_1, y_2, y_3, y_4$  celles de l'espace  $\Sigma_2$ .

Soient

$$a_x, a'_x, a''_x; b_x, b'_x, b''_x; c_x, c'_x, c''_x; d_x, d'_x, d''_x$$

des formes quaternaires linéaires en  $(x)$ . Leur égalité à zéro nous donnera douze plans quelconques de  $\Sigma_1$ .

La sextique  $C_1$  a pour équations (6)

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a'_x & b'_x & c'_x & d'_x \\ a''_x & b''_x & c''_x & d''_x \end{vmatrix} = 0.$$

(1) *On the rational transformation between two spaces* (Proceeding of the London Mathematical Society, t. III, 1870, p. 127-180. — *On the transformation of unicursal surfaces* (Math. Ann., t. III, 1871, p. 469-474).

(2) *Mélanges de Géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre* (Journal de Crelle, t. 68, 1868, p. 72-75). — *Sulle trasformazioni razionali nello spazio* (Rendiconti del R. Ist. Lomb., t. IV, 1871, 2<sup>e</sup> série, p. 269-279 et 315-324). — *Sulle trasformazioni razionali nello spazio* (Annali di Matematica, t. V, 1871, 2<sup>e</sup> série, p. 132-162).

(3) *Le trasformazioni razionali dello spazio determinate da una superficie generale di terzo ordine* (Atti di Torino, t. XXVI, 1890, p. 275).

(4) *Ueber die eindeutigen Raumtransformationen insbesondere in ihrer Anwendung auf Abbildung algebraischer Flächen* (Math. Annalen, t. III, 1871, p. 552-556).

(5) *Ueber diejenigen Cremonaschen Verwandtschaften bei denen den Ebenen des einen Raumes allgemeine Flächen 3. Ordnung andern entsprechen* (Jahr. der D. Math. Vereinigung, t. XIV, 1905, p. 18-24).

(6) STUYVAERT, loc. cit.

Une surface cubique circonscrite à la courbe  $C_1$  est représentée pour l'évanouissement du déterminant

$$(1) \quad \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ a_x & b_x & c_x & d_x \\ a'_x & b'_x & c'_x & d'_x \\ a''_x & b''_x & c''_x & d''_x \end{vmatrix} = 0.$$

Si

$$v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 + v_4 y_4 = 0$$

est l'équation d'un plan quelconque de  $\Sigma_2$ , la collinéation entre les plans de cet espace et les surfaces (1) peut être représentée par

$$v_1 : v_2 : v_3 : v_4 = \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4.$$

Dans ces conditions, les équations de la transformation sont

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4$$

$$= \begin{vmatrix} b_x & c_x & d_x \\ b'_x & c'_x & d'_x \\ b''_x & c''_x & d''_x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_x & d_x & a_x \\ c'_x & d'_x & a'_x \\ c''_x & d''_x & a''_x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} d_x & a_x & b_x \\ d'_x & a'_x & b'_x \\ d''_x & a''_x & b''_x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a'_x & b'_x & c'_x \\ a''_x & b''_x & c''_x \end{vmatrix}.$$

3. Aux  $\infty^3$  droites d'une congruence  $G$  de  $\Sigma_2$  correspondent dans  $\Sigma_1$  les cubiques gauches d'une congruence  $\Theta$  possédant la sextique  $C_1$  comme courbe octosingulière. Ainsi l'étude d'une telle congruence de cubiques gauches se trouve ramenée à celle d'une congruence de droites.

Supposons que la congruence  $G$  considérée dans  $\Sigma_2$  soit d'ordre  $m$  et de classe  $n$ . La congruence  $\Theta$  de cubiques gauches correspondantes dans  $\Sigma_1$  est d'ordre  $m$ (<sup>1</sup>)

---

(<sup>1</sup>) L'ordre d'une congruence de courbe est le nombre de courbes passant par un point, et la classe le nombre de courbes ayant une bisécante fixe.

et de classe égale au nombre de droites de  $G$  s'appuyant deux fois sur une cubique gauche, donc  $m + 3n$ .

A l'aide de la transformation, on établit aisément les théorèmes suivants :

*Les cubiques gauches de  $\Theta$  qui s'appuient sur une courbe d'ordre  $\mu$  et sur une courbe d'ordre  $\mu'$  sont au nombre de  $9\mu\mu'(m+n)$ .*

*Les cubiques gauches de  $\Theta$  qui s'appuient deux fois sur une courbe d'ordre  $\mu$  et de genre  $p$  sont au nombre de*

$$\left[ \frac{(3\mu-1)(3\mu-2)}{1.2} - p \right] m + \frac{3\mu(3\mu-1)}{1.2} n.$$

*Les surfaces engendrées par  $\infty^1$  cubiques de  $\Theta$  ont toutes les caractères  $P_g = 0$  et  $P_a \leq 0$ .*

*La sextique  $C_1$  est singulière <sup>(1)</sup> d'ordre  $3(m+n)$ .*

4. Examinons spécialement le cas  $m = 1$ .

Les congruences de droites d'ordre 1 peuvent se partager en trois types :

a. *Gerbe de rayons* (classe zéro).

b. *Système des bisécantes de la cubique gauche* (classe 3).

c. *Ensemble des droites s'appuyant sur une courbe d'ordre  $n$  et sur une droite  $(n-1)$  fois sécante de la courbe* (classe  $n$ ).

(1) Une courbe est singulière d'ordre  $p$  si les courbes de la congruence passant par un point de cette courbe engendrent une surface d'ordre  $p$ .

On obtient trois types de congruences de cubiques gauches, à savoir :

a. Congruence des cubiques gauches passant par un point fixe et s'appuyant huit fois sur une sextique gauche de genre 3 singulière d'ordre 3. Cette congruence est aussi de la première classe.

MM. Stuyvaert <sup>(1)</sup> et Veneroni <sup>(2)</sup> ont rencontré ce type, et M. Stuyvaert <sup>(3)</sup> l'a étudié.

b. Congruence des cubiques gauches possédant une sextique de genre 3 octosingulière d'ordre 12 et une courbe unicursale d'ordre 9 bisingulière d'ordre 6 et s'appuyant vingt-quatre fois sur la sextique singulière. La congruence est de la dixième classe.

c. Congruence formée pour les cubiques gauches possédant une sextique de genre 3 octosingulière d'ordre  $3(1+n)$ , une cubique gauche singulière d'ordre  $3n$  s'appuyant huit fois sur la sextique et une courbe d'ordre  $3n$  singulière d'ordre 3 s'appuyant  $8n$  fois sur la sextique et  $(n-1)$  fois sur la cubique. La classe est égale à  $3(1+n)$ .

Pour  $n = 1$  on retrouve une congruence de M. Stuyvaert <sup>(4)</sup>.

<sup>(1)</sup> Loc. cit. — Congruences linéaires de cubiques gauches (Comptes rendus, novembre 1905). — Congruences de triangles et autres variétés algébriques annulant des matrices (Journal de Crelle, 1907, Band 132, p. 132).

<sup>(2)</sup> Sopra alcuni sistemi di cubiche gobbe (Rendiconti di Palermo, t. XVI, 1902).

<sup>(3)</sup> Une congruence linéaire de cubiques gauches (Bul. de l'Acad. R. de Belgique, 1907).

<sup>(4)</sup> Loc. cit.

L'étude de ces congruences ne présente plus aucune difficulté (1).

---

(1) Récemment, M. J. de Vries a étudié, au moyen d'un cas particulier de la transformation, la gerbe des cubiques gauches par cinq points (*Verstagen van de W. Ak.*, Amsterdam, 1908). L'article de M. de Vries m'a été aimablement communiqué par M. Stuyvaert, que j'avais mis au courant de mes recherches et qui a lui-même rencontré la transformation générale en poursuivant ses études sur les figures représentées par des matrices de forme  $d$

Liège, 8 Janvier 1909.

Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques*,  
4<sup>e</sup> série, t. IX ; juin 1909.)