Bulletin de la Classe des sciences

Sur quelques points de diramation de seconde espèce et de troisième catégorie d'une surface multiple (Première communication)

Lucien Godeaux

Résumé
Démonstration de l'existence d'un point de diramation isolé d'une surface multiple en lequel le cône tangent se décompose en quatre plans et qui possède un point double biplanaire dans son domaine du premier ordre.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur quelques points de diramation de seconde espèce et de troisième catégorie d'une surface multiple,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(Première communication).

Résumé. — Démonstration de l'existence d'un point de diramation isolé d'une surface multiple en lequel le cône tangent se décompose en quatre plans et qui possède un point double biplanaire dans son domaine du premier ordre.

Soient F une surface algébrique contenant une involution cyclique I d'ordre premièr p n'ayant qu'un nombre fini de points unis et T la transformation birationnelle de F en soi génératrice de l'involution. Désignons par Φ une surface image de l'involution I sur laquelle les points de diramation sont isolés. Dans un mémoire récent [1], nous avons analysé la structure des points unis de l'involution I et celle des points de diramation de la surface Φ. Nous avons appelé point de seconde espèce et de la troisième catégorie un point uni tel que le cône tangent à la surface Φ au point de diramation correspondant se décompose en quatre cônes, le point de diramation étant alors appelé point de diramation de seconde espèce et de troisième catégorie également.

Considérons sur F un point uni O de seconde espèce et de

---

[1] *Mémoire sur les surfaces multiples* (Mémoires in-8° de l'Académie roy. de Belgique, 1952, t. XXVII, pp. 1-80). Voir également une communication sur *Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples* faite au Colloque de Géométrie algébrique, tenu à Liège du 9 au 12 juin 1952 (en cours d'impression).

troisième catégorie et soit O′ le point de diramation qui lu correspond sur Φ. Si nous projetons Φ du point O′ sur un hyperplan de l'espace ambiant ne contenant par O′, nous obtenons une surface Φ_1. Au domaine du point O′ correspond sur Φ_1 un ensemble de quatre courbes rationnelles σ_1, τ_1, τ_2, σ_2, chacune de ces courbes rencontrant la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontrant pas les autres. Le cône tangent à Φ en O′ s'obtient en projetant ces courbes de O′ et à priori les points (σ_1, τ_1), (τ_1, τ_2), (τ_2, σ_2), peuvent être doubles pour la surface Φ_1. Le but de cette note et de celle qui lui fera suite est de montrer que les points (σ_1, τ_1), (τ_2, σ_2) peuvent effectivement être doubles pour la surface Φ. D'une manière précise, dans cette première note, nous donnons un exemple d'une involution possédant un point uni O tel que, pour le point O′, le point (τ_2, σ_2) est double biplanaire ordinaire.

Pour éviter des redites assez longues, nous utiliserons les notations de notre mémoire cité plus haut sans les définir à nouveau.

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique d'ordre $p = 37$ n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Nous pouvons prendre comme modèle projectif de F une surface normale sur laquelle l'involution I est engendrée par une homographie T de période 37, de l'espace ambiant S_r, possédant 37 axes ponctuels dont un seul rencontre la surface aux points unis. Dans le système des sections hyperplames $|\ C\ |$ de F, il existe un système linéaire partiel $|\ C_0\ |$, dépourvu de points-base, appartenant à l'involution I. En rapportant projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace de dimension convenable, on obtient une surface Φ, normale, image de l'involution, sur laquelle les points de diramation sont isolés.

Nous allons étudier un point uni O de l'involution I auquel sont attachés les nombres $\alpha = 29$, $\beta = 23$. Dans ce but, nous devons déterminer les solutions λ, μ en nombres entiers positifs, tels que $\lambda + \mu < 37$, des congruences

$$\lambda - 29\,\mu \equiv 0, \quad \mu + 23\,\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 37).$$

Ces solutions sont

$$\lambda = 3 + 5t, \mu = 5 - 4t, \text{ pour } t = 0, 1\,;$$
$$\lambda = 1 + 5t, \mu = 14 - 4t, \text{ pour } t = 0, 1, 2, 3\,;$$
$$\lambda = 4 + 5t, \mu = 19 - 4t, \text{ pour } t = 0, 1, \ldots, 4\,;$$
$$\lambda = 2 + 5t, \mu = 28 - 4t, \text{ pour } t = 0, 1, \ldots, 6.$$

Nous rangerons ces solutions dans l'ordre des sommes $\lambda + \mu$ croissantes. La plus petite de ces sommes est donnée par $\lambda_1 = 3$, $\mu_1 = 5$ et nous avons

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = 4p, \qquad\qquad \mu_1 + \beta\lambda_1 = 2p.$$

Le point O est donc bien un point uni de la troisième catégorie.

Comme dans notre mémoire cité, nous désignerons par C_0', C_0'',..., $C_0^{(18)}$ les courbes C_0 ayant en O les multiplicités $\lambda_1 + \mu_1 = 8$ $\lambda_2 + \mu_2 = 9$, ..., $\lambda_{18} + \mu_{18} = 36$. Les sections hyperplanes de Φ seront désignées par Γ_0 et les courbes qui correspondent sur Φ aux courbes C_0', C_0'', ..., $C_0^{(18)}$ par Γ_0', Γ_0'', ..., $\Gamma_0^{(18)}$. La projection de la surface Φ ayant pour sections hyperplanes les courbes $\Gamma_0^{(i)}$ sera désignée par Φ_i. Sur cette surface, les courbes $\Gamma_0^{(i+1)}$ sont découpées par les hyperplans passant par un point que nous désignerons par O_i'. Enfin, nous désignerons par n l'ordre de la surface Φ, par π le genre de ses sections hyperplanes Γ_0. La surface F a l'ordre $37n$ et ses sections hyperplanes C ont le genre $37\pi - 36$.

2. Les courbes C_0', passent huit fois par le point O. En appliquant les méthodes exposées dans notre mémoire, on voit que ces courbes passent trois fois par trois points (1, 1), (1, 2), (1, 3) infiniment voisins successifs de O, deux fois par un point (1, 4) infiniment voisin de (1, 3), une fois par les points (1, 5), (1, 6), ..., (1, 22) infiniment voisins successifs de (1, 4), une fois par un point (1, 4, 1) infiniment voisin de (1, 4), deux fois par un point (2, 1) infiniment voisin de O, une fois par 27 points (2, 2), (2, 3),..., (2, 28) infiniment voisins successifs de (2, 1), enfin une fois par trois points (2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 1, 3) infiniment voisins successifs de (2, 1). Le schéma du comportement des courbes C_0' en O est donc

$$
\begin{array}{lll}
 & & 0^8,\ (2,1)^2,\ (2,2)^1,\ \ldots,\ (2,28)^1. \\
 & (1,1)^3, & (2,1,1)^1, \\
 & (2,1)^3, & (2,1,2)^1, \\
 & (1,3)^3, & (2,1,3)^1. \\
(1,4,1)^1, & (1,4)^2, & \\
 & (1,5)^1, & \\
 & \vdots & \\
 & (1,22)^1. &
\end{array}
$$

Sur la surface Φ_1, projection de Φ à partir du point de diramation O′, il correspond au domaine du point (1, 22), une droite σ_1, au domaine du point (1, 4, 1), une droite τ_1, au domaine du point (2, 1, 3), une droite τ_2 et enfin au domaine du point (2, 28), une droite σ_2.

Le point O′ est donc quadruple pour la surface Φ et le cône tangent en ce point à cette surface se décompose en quatre plans. On vérifie d'ailleurs que deux courbes C'_0, ont 4×37 points d'intersection absorbés en O.

3. Nous indiquerons maintenant les schémas des comportements en O des courbes C''_0, C'''_0, ..., $C_0^{(18)}$.

Courbes C''_0.

$$
\begin{array}{ll}
 & O^9,\ (2,1)^1,\ \ldots,\ (2,28)^1. \\
(1,1,1)^1,\ (1,1)^7, & \\
(1,1,1,1)^1, & (1,2)^1, \\
(1,1,1,2)^1, & \vdots \\
\vdots & (1,22)^1. \\
(1,1,1,5)^1. &
\end{array}
$$

Le point O absorbe 5×37 points d'intersection de deux courbes C''_0, donc le système $|\,\Gamma''_0\,|$ a le degré $n - 5$.

Courbes C'''_0.

$$
\begin{array}{llll}
 & O^{15},\ (2,1)^5,\ (2,2)^2,\ \ldots,\ (2,9)^2,\ (2,10)^1, & & \\
(1,1)^1, & (2,1,1)^3, & & (2,10,1)^1. \\
\vdots & (2,1,2)^3, & & \\
(1,22)^1. & & & \\
 & (2,1,3)^3. & &
\end{array}
$$

Le système $|\,\Gamma'''_0\,|$ a le degré $n - 9$.

Courbes $C_0^{(4)}$.

$O^{16}, (2, 1)^1, (2, 2)^2, \ldots, (2, 9)^2, (2, 10)^1,$
$(1, 1)^6, \quad (2, 1, 1)^2, \quad (2, 10, 1)^1.$
$(1, 2)^6, \quad (2, 1, 2)^2,$
$(1, 3)^6, \quad (2, 1, 3)^2.$
$(1, 4, 1)^3, (1, 4)^3,$

Le système $| \Gamma_0^{(4)} |$ a le degré $n - 12$.

Courbes $C_0^{(5)}$.

$O^{17}, (2, 1)^3, (2, 2)^2, \ldots, (2, 9)^2, (2, 10)^1,$
$(1, 1, 1)^1, (1, 1)^{10}, \quad (2, 1, 1)^1, \quad (2, 10, 1)^1.$
$(1, 1, 1, 1)^1,$
$\vdots \quad (1, 2)^4, \quad (2, 1, 2)^1,$
$(1, 1, 1, 5)^1, (1, 3)^4, \quad (2, 1, 3)^1.$
$(1, 4, 1)^2, (1, 4)^2,$

Le système $| \Gamma_0^{(5)} |$ a le degré $n - 13$.

Courbes $C_0^{(6)}$.

$O^{18}, (2, 1)^2, \ldots, (2, 9)^2, (2, 10)^1,$
$(1, 1, 2)^2, (1, 1, 1)^5, (1, 1)^9, \quad (2, 10, 1)^1.$
$(1, 1, 2, 1)^2, \quad (1, 2)^4,$
$(1, 1, 2, 2, 1)^1, (1, 1, 2, 2,)^1, \quad (1, 3)^4,$
$(1, 4, 1)^2, (1, 4)^2.$

Le degré du système $| \Gamma_0^{(6)} |$ est $n - 14$.

Courbes $C_0^{(7)}$.

$O^{23}, (2, 1)^7, (2, 2)^3, (2, 3)^3, (2, 4)^1,$
$(1, 1)^4, \quad (2, 1, 1)^4, \quad (2, 4, 1)^1,$
$(1, 2)^4, \quad (2, 1, 2)^4, \quad (2, 4, 2)^1.$
$(1, 3)^4, \quad (2, 1, 3)^4.$
$(1, 4, 1)^2, (1, 4)^2.$

Le degré du système $| \Gamma_0^{(7)} |$ est $n - 19$.

Courbes $C_0^{(8)}$.

$$
\begin{array}{lllll}
 & & O^{24}, & (2,1)^6, (2,2)^3, (2,3)^3, (2,4)^1, & \\
 & (1,1,1)^1, (1,1)^8, & (2,1,1)^3, & & (2,4,1)^1, \\
(1,1,1,1)^1, & & & & \\
\vdots & (1,2)^2, & (2,1,2)^3, & & (2,4,2)^1. \\
(1,1,1,5)^1, & & & & \\
 & (1,3)^2, & (2,1,3)^3. & & \\
 & (1,4,1)^1, (1,4)^1. & & &
\end{array}
$$

Le système $| \Gamma_0^{(8)} |$ a le degré $n - 20$.

Courbes $C_0^{(9)}$.

$$
\begin{array}{llll}
 & O^{25}, & (2,1)^5, (2,2)^3, (2,3)^3, (2,4)^1, & \\
(1,1,2)^2, (1,1,1)^5, (1,1)^7, & (2,1,1)^2, & & (2,4,1)^1, \\
(1,1,2,1)^2, (1,2)^2, & (2,1,2)^2, & & (2,4,2)^1. \\
(1,1,2,2,1)^1, (1,1,2,2)^1, (1,3)^2, & (2,1,3)^2. & & \\
(1,4,1)^1, (1,4)^1. & & &
\end{array}
$$

Le système $| \Gamma_0^{(9)} |$ a le degré $n - 21$.

Courbes $C_0^{(10)}$.

$$
\begin{array}{llll}
 & O^{26}, & (2,6)^4, (2,2)^3, (2,3)^3, (2,4)^1, & \\
(1,1,4)^1, (1,1,3)^4, (1,1,2)^4, (1,1,1)^4, & (1,1)^6, & (2,1,1)^1, & (2,4,1)^1, \\
(1,1,4,1)^1, & (1,2)^2, & (2,1,2)^1, & (2,4,2)^1, \\
(1,1,4,2)^1, & (1,3)^2, & (2,1,3)^1. & \\
(1,1,4,3)^1. & (1,4,1)^1, (1,4)^1. & &
\end{array}
$$

Le système $| \Gamma_0^{(12)} |$ a le degré $n - 22$.

Courbes $C_0^{(11)}$.

$$
\begin{array}{llll}
 & O^{27}, & (2,1)^3, (2,2)^3, (2,3)^3, (2,4)^1, & \\
(1,1,7)^1, (1,1,6)^3, \ldots, (1,1,1)^3, & (1,1)^5, & & (2,4,1)^1, \\
(1,1,7,1)^1, & (1,2)^2, & & (2,4,2)^1. \\
{}_1 1,1,7,2)^1. & (1,3)^2, & & \\
 & (1,4,1)^1, (1,4)^1. & &
\end{array}
$$

Le système $| \Gamma_0^{(11)} |$ a le degré $n - 23$.

Courbes $C_0^{(12)}$.

$$O^{30},\ (2,1)^7,$$
$$(1,1)^2,\quad (2,1,1)^7,$$
$$(1,2)^2,\quad (2,1,2)^7,$$
$$(1,3)^2,\quad (2,1,3)^7.$$
$$(1,4,1)^1,\ (1,4)^1.$$

Le système $|\Gamma_0^{(12)}|$ a le degré $n-30$.

Pour les systèmes suivants, nous indiquerons simplement les points unis de première espèce et leurs multiplicités par les courbes.

Courbes $C_0^{(13)}$. $(1,1,1,5)^1,\ (2,1,3)^6$.
Le système $|\Gamma_0^{(13)}|$ a le degré $n-31$.

Courbes $C_0^{(14)}$. $(1,1,2,2,1)^1,\ (2,1,3)^5$.
Le système $|\Gamma_0^{(14)}|$ a le degré $n-32$.

Courbes $C_0^{(15)}$. $(1,1,4,3)^1,\ (2,1,3)^4$.
$|\Gamma_0^{(15)}|$ a le degré $n-33$.

Courbes $C_0^{(16)}$. $(1,1,7,2)^1,\ (2,1,3)^3$.
$|\Gamma_0^{(16)}|$ a le degré $n-34$.

Courbes $C_0^{(17)}$. $(1,1,13,1)^1,\ (2,1,3)^2$.
$|\Gamma_0^{(17)}|$ a le degré $n-35$.

Courbes $C_0^{(18)}$. $(1,1,31)^1,\ (2,1,3)^1$.
$|\Gamma_0^{(18)}|$ a le degré $n-36$.

Les courbes $C_0^{(19)}$ ont la multiplicité 37 et des tangentes variables en O.

4. Interprétons maintenant ces résultats.

Sur la surface Φ_1 les courbes T_0'' sont découpées par les hyperplans passant par le point O_1' commun aux droites τ_1, τ_2. Ce point est simple pour la surface et sur Φ_2, il lui correspond une droite exceptionnelle g_1. Celle-ci est l'homologue du domaine du point uni de première espèce $(1,1,1,5)$.

Sur Φ_2, la droite exceptionnelle g_1 rencontre la droite σ_1 en un point qui représente la droite τ_1 et la droite σ_2 en un point qui représente τ_2.

Les courbes Γ_0''' sont découpées sur Φ_2 par les hyperplans passant par le point O_2' commun à g_1 et à τ_2. Sur Φ_1, ces courbes sont découpées par les hyperplans passant par la droite τ_2.

Sur la surface Φ_3, nous avons une droite σ_1, une cubique gauche τ_2 coupant σ_1 en un point qui représente τ_1, une droite ρ_2 qui représente le domaine du point (2, 10, 1). Cette droite contient un point singulier qui représente σ_2.

Sur la surface Φ_3, les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ sont découpées par les hyperplans passant par le point O_3' commun à σ_1 et τ_2. Sur la surface Φ_4, nous avons une cubique gauche τ_1 contenant un point, singulier pour la surface, représentant σ_1, une conique τ_2 rencontrant τ_1 en un point, une droite ρ_2.

Les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ sont découpées sur Φ_4 par les hyperplans passant par le point O_2' commun aux courbes τ_1, τ_2. Sur la surface Φ_5, nous voyons réapparaître la droite exceptionnelle g_1. Cette droite s'appuie sur la conique τ_1 et sur la droite τ_2,

Les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ sont découpées sur Φ_5 par les hyperplans passant par le point O_5' commun à la droite g_1 et à la droite τ_2. Ce point est simple pour la surface et il lui correspond sur Φ_6 une droite exceptionnelle g_2 représentant le domaine du point (1, 1, 2, 2, 1). La droite g_2 s'appuie sur la conique τ_1 et sur la droite ρ_2. Ce dernier point d'appui est singulier pour la surface car il représente τ_2.

Les courbes $\Gamma_0^{(7)}$ sont découpées sur Φ_6 par les hyperplans passant par le point O_6' commun à g_2 et à ρ_2. Sur la surface Φ_7 nous avons une conique τ_1, une quartique gauche τ_2 et une droite représentant le domaine du point (2, 4, 2), que nous désignerons par ρ_1. Les courbes $\Gamma_0^{(8)}$ sont découpées sur Φ_7 par les hyperplans passant par le point O_7' commun aux courbes τ_1, τ_2 et on voit réapparaître sur Φ_8 la droite exceptionnelle g_1.

Sur Φ_7, les courbes $\Gamma_0^{(9)}$ sont découpées par les hyperplans touchant la courbe τ_2 en O_7' ; on voit réapparaître sur Φ_9 la droite exceptionnelle g_2. De même, les courbes $\Gamma_0^{(10)}$ sont découpées sur Φ_7 par les hyperplans osculant la courbe τ_2 en O_7'. Sur la surface Φ_{10}, on a une droite exceptionnelle g_3 représentant le point (1, 1, 4, 3). Sur la surface Φ_7, les courbes $\Gamma_0^{(11)}$ sont découpées par les hyperplans ayant un contact du troisième ordre avec la courbe τ_2 en O'_7. Sur la surface Φ_{11}, on a une droite exceptionnelle g_4, représentant le domaine du point (1, 1, 7, 2).

Enfin, sur la surface Φ_7, les courbes $\Gamma_0^{(12)}$ sont découpées par les hyperplans contenant la courbe τ_2. Et ainsi de suite.

5. Revenons à la surface Φ_1 et appelons O'_{11}, O'_{12}, O'_{13}, O'_{14}, O'_{15} les points infiniment voisins successifs de O'_1 situés sur la droite τ_2. On peut facilement, d'après ce qui précède, déterminer les hyperplans qui découpent sur Φ_1 les courbes Γ''_0, Γ'''_0, ..., $\Gamma_0^{(18)}$.

Les courbes Γ''_0 sont découpées par les hyperplans passant par O'_1.

Les courbes Γ'''_0 sont découpées par les hyperplans passant par la droite τ_2.

Les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ sont découpées par les hyperplans passant par les droites τ_1, τ_2.

Les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ sont les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ touchant en O'_1 la droite τ_2 ; elles passent donc par le point O'_{11}.

Les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ sont les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ ayant un point d'inflexion en O'_1, la tangente d'inflexion étant τ_2. Elles passent donc par les points O'_{11}, O'_{12}.

Les courbes $\Gamma_0^{(7)}$ sont découpées par les hyperplans passant par la droite τ_1 et touchant la surface Φ_1 le long de la droite τ_2.

Les courbes $\Gamma_0^{(8)}$ sont les courbes $\Gamma_0^{(7)}$ passant par le point O'_1.

Les courbes $\Gamma_0^{(9)}$ sont les courbes $\Gamma_0^{(7)}$ touchant la droite τ_2 en O'_1.

Les courbes $\Gamma_0^{(10)}$ sont les courbes $\Gamma_0^{(7)}$ ayant un contact du second ordre avec la droite τ_2 en O'_1.

Les courbes $\Gamma_0^{(11)}$ sont les courbes $\Gamma_0^{(7)}$ ayant un contact du troisième ordre avec la droite τ_2 en O'_1 ; elles passent donc par les points O'_{11}, O'_{12}, O'_{13}.

Les courbes $\Gamma_0^{(12)}$ sont découpées par les hyperplans passant par la droite τ_1 et ayant un contact du second ordre avec la surface Φ_1 le long de la droite τ_2.

Les courbes $\Gamma_0^{(13)}$ sont les courbes $\Gamma_0^{(12)}$ passant par O'_1.

Les courbes $\Gamma_0^{(14)}$ sont les courbes $\Gamma_0^{(12)}$ touchant τ_2 en O_1'.

Les courbes $\Gamma_0^{(15)}$ sont les courbes $\Gamma_0^{(12)}$ ayant un contact du second ordre avec τ_2 en O_1'.

Les courbes $\Gamma_0^{(16)}$ sont les courbes $\Gamma_0^{(12)}$ ayant un contact du troisième ordre avec τ_2 en O_1'.

Les courbes $\Gamma_0^{(17)}$ sont les courbes $\Gamma_0^{(12)}$ ayant un contact du quatrième ordre avec τ_2 en O_1' ; elles passent par les points O_1', O_{11}', O_{12}', O_{13}', O_{14}'.

Enfin, les courbes $\Gamma_0^{(18)}$ sont les courbes $\Gamma_0^{(12)}$ ayant un contact du cinquième ordre avec τ_2 en O_1' ; elles passent par les points O_1', O_{11}', ..., O_{15}'.

On en conclut qu'aux domaines des points (1, 1, 1, 5), (1, 1, 2, 2, 1), (1, 1, 4, 3), (1, 1, 7, 2), (1, 1, 13, 1), (1, 1, 31) correspondent respectivement les points O_1', O_{11}', O_{12}', O_{13}', O_{14}', O_{15}'.

Les courbes $\Gamma_0^{(19)}$ sont les courbes $\Gamma_0^{(12)}$ ayant un contact d'ordre six avec τ_2 en O_1'.

6. D'après ce qui précède, les points communs aux droites τ_1, τ_2 et aux droites σ_1, τ_1 sont simples pour la surface Φ_1.

Supposons que le point commun aux droites τ_2, σ_2 soit également simple pour la surface Φ_1. On a alors

$$\Gamma_0 = \Gamma_0' + \sigma_1 + \tau_1 + \tau_2 + \sigma_2$$

et les courbes rationnelles σ_1, τ_1, τ_2, σ_2 ont respectivement pour degrés virtuels -2, -3, -3, -2.

On doit avoir

$$\Gamma_0 = \Gamma_0''' + \sigma_1 + \tau_1 + 2\tau_2 + \sigma_2,$$

mais alors, les courbes Γ_0''' rencontrent la droite τ_2 en quatre points, contrairement à ce qu'on a trouvé plus haut. Il faut donc que le point commun à τ_2, σ_2 soit double pour Φ_1.

Supposons que ce point soit double conique pour Φ_1 ; il est alors équivalent à une courbe rationnelle ρ de degré -2 et on a

$$\Gamma_0 = \Gamma_0' + \sigma_1 + \tau_1 + \tau_2 + \rho + \sigma_2.$$

Les degrés virtuels des courbes σ_1, τ_1, τ_2, σ_2 ont encore les mêmes valeurs et on doit avoir

$$\Gamma_0 = \Gamma_0''' + \sigma_1 + \tau_1 + 2\tau_2 + xp + \sigma_2.$$

Si l'on exprime que les courbes Γ_0''' rencontrent τ_2 en trois points variables, on trouve $x = 2$. Dans ces conditions. les courbes Γ_0''' rencontrent ρ en un point et ρ coïncide avec la droite ρ_2 rencontrée plus haut.

On doit ensuite avoir

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(4)} + \sigma_1 + 2\tau_1 + 2\tau_2 + 2\rho + \sigma_2,$$

puis

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(7)} + \sigma_1 + 2\tau_1 + 3\tau_2 + x\rho + \sigma_2.$$

En exprimant que τ_2 rencontre les courbes $\Gamma_0^{(7)}$ en quatre points, on trouve $x = 3$. Mais alors, les courbes $\Gamma_0^{(7)}$ rencontreraient ρ en un point, ce qui est impossible. Il en résulte que le point commun à τ_2, σ_2 est double biplanaire pour la surface Φ_1 et équivalent à l'ensemble des droites ρ_1, ρ_2.

Les droites ρ_1, ρ_2 sont de degré virtuel — 2 et se rencontrent en un point. L'une rencontre τ_2 et l'autre rencontre σ_2. Les hyperplans passant par la droite τ_2 rencontrent cette dernière en un point, mais ne rencontrent pas la première; on en conclut que ρ_1 rencontre τ_2 et ρ_2, σ_2.

Cela étant, on a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_1 \tau_1 + \tau_2 + \rho_1 + \rho_2 + \sigma_2$$

et les droites σ_1, τ_1, τ_2, σ_2 ont toujours pour degrés virtuels — 2, — 3, — 3, — 2.

On a

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &\equiv \Gamma_0''' + \sigma_1 + \tau_1 + 2(\tau_2 + \rho_1 + \rho_2) + \sigma_2,\\
\Gamma_0 &\equiv \Gamma_0^{(4)} + \sigma_1 + 2(\tau_1 + \tau_2 + \rho_1 + \rho_2) + \sigma_2,\\
\Gamma_0 &\equiv \Gamma_0^{(7)} + \sigma_1 + 2\tau_1 + 3(\tau_2 + \rho_1) + 2\rho_2 + \sigma_2,\\
\Gamma_0 &\equiv \Gamma_0^{(12)} + \sigma_1 + 2\tau_1 + 4\tau_2 + 3\rho_1 + 2\rho_2 + \sigma_2.
\end{aligned}$$

Ainsi donc se trouve prouvée *l'existence d'un point de diramation quadruple pour la surface Φ en lequel le cône tangent se scinde en quatre plans* (σ_1), (τ_1), (τ_2), (σ_2) ; *le plan* (τ_1) *coupe les plans* (σ_1), (τ_2) *chacun suivant une droite et les plans* (τ_2), (σ_2) *se coupent suivant une droite; sur cette dernière, la surface Φ possède un point double biplanaire ordinaire infiniment voisin du point de diramation.*

Liège, le 29 juillet 1952.