Bulletin de la Classe des sciences

Sur quelques involutions rationnelles appartenant à une surface algébrique (première note)

Lucien Godeaux

Résumé
Construction d'une involution cyclique, appartenant à une surface de genres Pa = Pg = 4, possédant quatre points unis, dont l'image est une surface rationnelle.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur quelques involutions rationnelles appartenant à une surface algébrique,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(Première note).

Résumé. — Construction d'une involution cyclique, appartenant à une surface de genres $p_a = p_g = 1$, possédant quatre points unis, dont l'image est une surface rationnelle.

On sait que si l'on a, entre deux surfaces algébriques Φ, F, une correspondance algébrique $(1, n)$, la transformée d'une courbe canonique de Φ, augmentée de la courbe unie de l'involution déterminée sur F par la correspondance, est une courbe canonique de F. Lorsque l'involution sur F ne possède qu'un nombre fini de points unis, les transformées des courbes canoniques de Φ sont des courbes canoniques de F ayant certaines singularités aux points unis de l'involution. Il se peut que ces singularités soient telles qu'il n'existe pas de courbes canoniques de F les possédant et la surface Φ est alors dépourvue de courbes canoniques. On peut donc avoir une involution rationnelle appartenant à une surface de genre $p_g > 0$; nous en avons donné quelques exemples (1). Dans cette note et dans celle qui lui fera suite, nous construirons deux nouveaux exemples particulièrement simples.

(1) *Sur une involution rationnelle douée de trois points de coïncidence appartenant à une surface de genres trois* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1921, pp. 653-665, 694-702) ; *Sur l'existence d'involutions rationnelles n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique* (BULL. DES SC. MATH., 1933, pp. 44-47) ; *Sur une involution rationnelle n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface de genre quatre* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1940, pp. 9-17).

Supposons que $p = \nu^2 + 1$ soit un nombre premier. La surface

$$a_1x_1^\nu x_2 + a_2x_2^\nu x_3 + a_3x_3^\nu x_4 + a_4x_4^\nu x_1 = 0$$

est transformée en elle-même par une homographie de période p, d'équations

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} x_1 & \epsilon x_2 & \epsilon^{\nu^2-\nu+2}x_3 & \epsilon^{\nu^2-\nu+1}x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

où ϵ est une racine primitive d'ordre p de l'unité. Sur la surface, cette homographie engendre une involution. Nous considérerons les cas $\nu = 4$ et $\nu = 6$. Précisément, cette note est consacrée au cas $\nu = 4$. Nous montrons que la surface du cinquième ordre obtenue contient une involution d'ordre 17, possédant quatre points unis, qui est rationnelle, alors que les genres de la surface support sont $p_a = p_g = 4$, $\mathrm{P}_2 = 10$.

1. Considérons la surface F du cinquième ordre

$$a_1x_1^4x_2 + a_2x_2^4x_3 + a_3x_3^4x_4 + a_4x_4^4x_1 = 0,$$

transformée en soi par l'homographie H de période 17, d'équation

$$\begin{pmatrix} x_1 & \epsilon x_2 & \epsilon^{14}x_3 & \epsilon^{13}x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

où ϵ est une racine primitive d'ordre 17 de l'unité.

L'homographie H possède quatre points unis : les sommets O_1, O_2, O_3, O_4 du tétraèdre de référence et ces points sont simples pour la surface F. Par conséquent, H engendre sur F une involution I, d'ordre 17, présentant quatre points unis.

Soit Φ une surface image de l'involution I ; nous allons démontrer que cette surface est rationnellle. Nous commencerons par construire un modèle projectif de la surface Φ.

A une section plane C de F, découpée par un plan distinct des faces du tétraèdre de référence, correspond sur Φ une courbe Γ, de genre six. Il existe 40 groupes de l'involution I ayant deux points sur une courbe C, donc Γ possède 40 points doubles. Lorsque C varie, Γ décrit un système continu rationnel appartenant donc, d'après un théorème d'Enriques, comme courbe totale, à un système linéaire de genre 46 et de degré 35. Nous désignerons ce système par $|\Gamma_0|$; il a pour homologue sur F un système $|C_0|$, appartenant à l'involution, privé de points-base, découpé par les surfaces d'ordre 17, transformées en elles-mêmes par H, ne passant par aucun des points O_1, O_2, O_3, O_4. La dimension r des systèmes $|\Gamma_0|$, $|C_0|$ est certainement supérieure à trois et en rapportant projectivement les courbes Γ_0 aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions, on obtient pour modèle projectif de Φ une surface d'ordre 85. C'est ce modèle projectif que nous désignerons dorénavant par Φ.

2. Au point uni O_1, la surface a pour plan tangent $x_2 = 0$ et dans ce plan, H détermine l'homographie

$$\begin{pmatrix} x_1 & \epsilon^{14}x_3 & \epsilon^{13}x_4 \\ x_1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

En posant $\eta = \epsilon^{14}$, cette homographie s'écrit

$$\begin{pmatrix} x_1 & \eta x_3 & \eta^7 x_4 \\ x_1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

et en posant $\zeta = \epsilon^{13}$,

$$\begin{pmatrix} x_1 & \zeta^5 x_3 & \zeta^{a4} \\ x_1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Les entiers attachés au point uni O_1 sont donc $\alpha = 5$, $\beta = 7$.

Dans le plan tangent $x_3 = 0$ au point uni O_2, H détermine l'homographie

$$\begin{pmatrix} x_2 & \epsilon^{16}x_1 & \epsilon^{12}x_4 \\ x_2 & x_1 & x_4 \end{pmatrix}.$$

En posant $\zeta = \epsilon^{16}$, on a $\zeta^5 = \epsilon^{12}$ et en posant $\eta = \epsilon^{12}$, on a $\eta^7 = \epsilon^{16}$. On en conclut qu'au point O_2 sont également attachés les entiers $\alpha = 5$, $\beta = 7$.

Dans le plan tangent $x_4 = 0$ au point O_3, H détermine l'homographie

$$\begin{pmatrix} x_3 & \epsilon^3 x_1 & \epsilon^4 x_2 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

On voit immédiatement que les entiers attachés à O_3 sont encore $\alpha = 5$, $\beta = 7$.

Enfin, dans le plan tangent $x_1 = 0$ à F en O_4, H détermine l'homographie

$$\begin{pmatrix} x_4 & \epsilon^5 x_2 & \epsilon x_3 \\ x_4 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

et les entiers attachés au point uni O_4 sont encore $\alpha = 5$, $\beta = 7$.

Les quatre points unis de l'involution I sont donc de même nature, il suffira donc d'étudier la structure de l'un d'eux, par exemple de O_1.

3. Pour déterminer la structure du point uni O_1 et celle du point de diramation O_1' qui lui correspond sur Φ, nous appliquerons les résultats que nous avons obtenus dans ces dernières années (¹).

Appelons C_0' les courbes C_0 passant par O_1. Les courbes C_0' ont en O_1 la multiplicité cinq, trois tangentes étant confondues avec O_1O_4 et deux avec O_1O_3. Elles passent en outre trois fois par quatre points (4,1), (4,2), (4,3), (4,4) infiniment voisins successifs de O_1, le premier étant sur O_1O_4, et deux fois par six points (3,1), (3,2), ..., (3,6) infiniment voisins successifs de O_1, le premier étant sur O_1O_3.

Soient C_0'' les courbes C_0' assujetties à toucher en O_1 une droite de $x_2 = 0$ distincte de O_1O_4, O_1O_3. Les courbes C_0'' passent neuf fois par le point O_1, deux fois par chacun des points (4,1), ..., (4,4), trois fois par le point (3,1), une fois par chacun des points (3,2), ..., (3,6) et enfin deux fois par deux points (3, 1, 1), (3, 1, 2) infiniment voisins successifs du point (3,1).

Les points (4,4), (3,6) et (3, 1, 2) sont unis de première espèce pour l'involution I, les autres points introduits sont unis de seconde espèce.

Pour la surface Φ, le point de diramation O_1' est quintuple et équivalent au point de vue des transformations birationnelles, à trois courbes rationnelles σ_{11}, τ_1, σ_{12} de degrés virtuels respectifs

(¹) *Mémoire sur les surfaces multiples* (MÉMOIRES IN-8° DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE) En cours d'impression.

-3, -2, -4. Les courbes σ_{11}, σ_{12} rencontrent τ_1 en un point chacune, mais ne se rencontrent pas.

De même, les points de diramation O'_2, O'_3, O'_4 de Φ homologues respectivement des points O_2, O_3, O_4, sont quintuples pour la surface. Le point O'_i est équivalent à trois courbes rationnelles σ_{i1}, τ_i, σ_{i2} formant une configuration analogue à celles des courbes σ_{11}, τ_1, σ_{12}.

4. Les points précédents peuvent également être obtenus, de la manière suivante :

Opérons la transformation quadratique

$$\theta_3 = \begin{pmatrix} y_1^2 & y_2 y_3 & y_1 y_3 & y_3 y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

dont l'inverse est

$$\theta_3^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 x_3 & x_1 x_2 & x_3^2 & x_1 x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}.$$

Au point infiniment voisin de O_1 sur la droite O_1O_3, θ_3 fait correspondre le point (1, 0, 0, 0). A la surface F correspond la surface

$$a_1 y_1^7 y_2 - a_2 y_2^4 y_3^4 + a_3 y_1^3 y_3^4 y_4 + a_4 y_1 y_3^3 y_4^4 = 0 \qquad (1)$$

et à l'homographie H, l'homographie

$$\begin{pmatrix} y_1 & \epsilon y_2 & \epsilon^{14} y_3 & \epsilon^{16} y_4 \\ y_1 & y_2 & y_4 & y_3 \end{pmatrix}.$$

Au point (3, 1) correspond le point (1, 0, 0, 0) de la surface (1) et en ce point, celle-ci a pour plan tangent $y_2 = 0$.

Pour obtenir le point (3,6), il faut opérer six fois θ_3, c'est-à-dire la transformation

$$\begin{pmatrix} y_1^7 & y_2 y_3^6 & y_1^6 y_3 & y_3^6 y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi la surface

$$a_1 y_1^{22} y_2 + a_2 y_2^4 y_3^{19} + a_3 y_1^{18} y_3^4 y_4 + a_4 y_1 y_3^{18} y_4^4 = 0.$$

A l'homographie H correspond l'homographie

$$\begin{pmatrix} y_1 & \epsilon y_2 & \epsilon^{14} y_3 & \epsilon^{14} y_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix},$$

qui donne bien, dans le plan tangent $y_2 = 0$ au point (3,6) de la surface précédente, une homologie ayant ce point pour centre. Le point (3,6) est donc bien uni de première espèce.

Pour étudier les points (4,1), ..., (4,4), il suffit d'opérer quatre fois de suite la transformation quadratique

$$\theta_4 = \begin{pmatrix} y_1^2 & y_2 y_4 & y_3 y_4 & y_1 y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

dont l'inverse est

$$\theta_4^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 x_4 & x_1 x_2 & x_1 x_3 & x_1^2 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}.$$

Au point (4,1), θ_4 fait correspondre le point (1, 0, 0, 0) et ainsi de suite.

L'opération θ_4 fait correspondre à F la surface

$$a_1 y_1^8 y_2 + a_2 y_2^4 y_3 y_4^4 + a_3 y_1 y_3^4 y_4^4 + a_4 y_1^6 y_4^3 = 0$$

et à H, l'homographie

$$\begin{pmatrix} y_1 & \epsilon^5 y_2 & \epsilon y_3 & \epsilon^{13} y_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}.$$

Cette homographie détermine, dans le plan tangent $y_2 = 0$ à la surface au point (1, 0, 0, 0), c'est-à-dire au point (4,1), une homographie non homologique, donc (4,1) est un point uni de seconde espèce.

Une seconde application de la transformation θ_4 conduit à la surface

$$a_1 y_1^{12} y_2 + a_2 y_2^4 y_3 y_4^3 + a_3 y_1^2 y_3^4 y_4^7 + a_4 y_1^{11} y_4^2 = 0$$

et à l'homographie

$$\begin{pmatrix} y_1 & \epsilon^9 y_2 & \epsilon^5 y_3 & \epsilon^{13} y_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que le point (4,2) est uni de seconde espèce.

En appliquant une troisième fois θ_4, on obtient la surface

$$y_1^{16}(a_1y_2 + a_4y_4) + a_2y_2^4y_3y_4^{12} + a_3y_1^3y_3^4y_4^{10} = 0$$

et l'homographie

$$\begin{pmatrix} y_1 & \epsilon^{13}y_2 & \epsilon^9 y_3 & \epsilon^{13}y_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}.$$

Celle-ci est une homographie axiale d'axe $y_1 = y_3 = 0$, les points unis étant (1, 0, 0, 0) et (0, 0, 1, 0). Le plan tangent à F en (1, 0, 0, 0) a pour équation $a_1y_2 + a_1y_4 = 0$ et dans ce plan, l'homographie détermine une homographie non homologique. Le point (4,3) est par suite uni de seconde espèce.

Au point (4,4) correspond le point infiniment voisin de (1, 0, 0 0) sur la droite $a_1y_2 + a_4y_4 = 0$, $y_3 = 0$.

Changeons de tétraèdre de référence en posant

$$y_2' = a_1y_2 + a_4y_4.$$

L'équation de la surface devient

$$a_1^4y_1^{16}y_2' + a_2(y_2' - a_4y_4)^4y_3y_4^{12} + a_3a_1^4y_1^3y_3^4y_4^{10} = 0.$$

Les équations de l'homographie restent les mêmes, sauf le changement de y_2 en y_2'.

Opérons maintenant une dernière fois la transformation θ_4. On obtient la surface

$$a_1^4y_1^{20}y_2' + a_2(y_2 - a_4y_1)^4y_3y_4^{16} + a_1^4a_3y_1^4y_3^4y_4^{13} = 0$$

et l'homographie biaxiale

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2' & \epsilon^{13}y_3 & \epsilon^{13}y_4 \\ y_1 & y_2' & y_3 & y_4 \end{pmatrix}.$$

On voit immédiatement que le point (4,4) est uni de première espèce, le plan tangent à la surface en (1, 0, 0, 0) passant par un des axes de l'homographie.

Il nous reste à montrer que le point (3, 1, 2) est uni de première espèce. Il suffit de reprendre la surface (1) et l'homographie correspondante. En opérant deux fois θ_4, on trouve la surface

$$a_1y_4^{21}y_2 + a_2y_2^4y_3^4y_4^{14} + a_3y_1^{11}y_3^4y_4^7 + a_4y_1^{11}y_3^3y_4^8 = 0$$

et l'homographie

$$\begin{pmatrix} y_1 & \epsilon^3 y_2 & \epsilon^{16} y_3 & \epsilon^{16} y_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}.$$

Celle-ci détermine bien une homologie dans le plan $y_2 = 0$ tangent à la surface au point (1, 0, 0, 0) et le point (3, 1, 2) est bien uni de première espèce.

5. Supposons que la surface Φ possède un système canonique. Les courbes de ce système doivent rencontrer en deux points chacune des courbes σ_{12}, σ_{22}, σ_{32}, σ_{42} et en un point chacune des courbes σ_{11}, σ_{21}, σ_{31}, σ_{41}. Il doit donc leur correspondre sur F des courbes canoniques de cette surface passant deux fois par le point (4,4) et une fois par le point (3,6), donc trois fois par le point O_1 et de même trois fois par chacun des points O_2, O_3, O_4. Or, les courbes canoniques de F sont découpées par les plans de l'espace et il n'existe par suite aucune de ces courbes satisfaisant aux conditions précédentes. On en conclut que la surface Φ est dépourvue de courbes canoniques. Comme la surface Φ est, de même que la surface F, régulière. La surface Φ a donc les genres

$$p_a = p_g = 0.$$

Si la surface Φ possède des courbes bicanoniques, celles-ci doivent rencontrer en deux points la courbe σ_{11} et en quatre points la courbe σ_{12}. A ces courbes correspondent sur F des courbes bicanoniques passant deux fois par (3,6) et quatre fois par (4,4), donc six fois par O_0. Elles doivent avoir le même comportement en O_2, O_3, O_4. Les courbes bicanoniques de F étant découpées par les quadriques, il doit exister des quadriques tangentes à $x_2 = 0$ en O_1, à $x_3 = 0$ en O_2, ..., ce qui est impossible. On en conclut que le bigenre P_2 de Φ est nul. Par conséquent, d'après le théorème de Castelnuovo,

La surface Φ est rationnelle.

6. Ajoutons quelques propriétés de la surface Φ.

La surface F contient les droites

$$x_1 = 0, \quad x_3 = 0\,; \quad x_2 = 0, \quad x_4 = 0.$$

A ces droites correspondent sur Φ des droites que nous désignerons par γ_{13}, γ_{24}.

La section de F par le plan $x_1 = 0$ se compose de la droite $x_1 = x_3 = 0$ et d'une quartique

$$x_1 = 0, \qquad a_2 x_2^4 + a_3 x_3^3 x_4 = 0, \tag{1}$$

transformée en elle-même par H. Il lui correspond sur Φ une quartique γ_1 et il existe un hyperplan qui a un contact du seizième ordre avec la surface Φ le long de la courbe $\gamma_1 + \gamma_{13}$.

Désignons de même par γ_2, γ_3, γ_4 les quartiques qui correspondent sur Φ aux quartiques de F situées dans les plans $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

Il existe un hyperplan qui a un contact du seizième ordre avec Φ le long de la courbe $\gamma_2 + \gamma_{24}$, un hyperplan ayant un contact du même ordre le long de la courbe $\gamma_3 + \gamma_{13}$ et un hyperplan ayant un contact du même ordre le long de la courbe $\gamma_4 + \gamma_{24}$.

Nous allons préciser ce résultat. Observons que la courbe (1) passe une fois par le point homologue de la courbe τ_4 et une fois par le point homologue de la courbe σ_{32}. De plus la droite $x_1 = x_3 = 0$ passe par les points homologues des courbes σ_{41}, σ_{21}. Cela étant, on a la relation fonctionnelle

$$\begin{aligned} \Gamma_0 \equiv 17(\gamma_1 + \gamma_{13}) &+ 7\sigma_{21} + 4\tau_2 + \sigma_{22} \\ &+ \sigma_{31} + 3\tau_3 + 5\sigma_{32} \\ &+ 11\sigma_{41} + 16\tau_4 + 4\sigma_{42}, \end{aligned}$$

et des relations analogues pour les courbes γ_2, γ_3, γ_4 et les droites γ_{13}, γ_{24}.

Il existe un espace linéaire à $r - 2$ dimensions ayant un contact d'ordre 16 avec Φ le long de γ_{13} et un espace analogue ayant la même propriété le long de la droite γ_{24}.

Les courbes γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 passent par les points $O'_2O'_3O'_4$, $O'_3O'_4O'_1$, $O'_4O'_1O'_2$, $O'_1O'_2O'_3$ respectivement et les droites γ_{13}, γ_{24} coïncident avec les droites $O'_2O'_4$, $O'_1O'_3$.

Liège, le 26 février 1952.