Bulletin de la Classe des sciences

Observations sur les points unis de seconde espèce et de troisième catégorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique

Lucien Godeaux

Résumé

Détermination des couples de nombres entiers qui fixent la structure d'un point uni de seconde espèce et de troisième catégorie d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique, c'est-à-dire d'un point uni auquel correspond, sur une surface image de l'involution, un point de diramation en lequel le cône tangent à la surface se scinde en quatre cônes rationnels.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Observations sur les points unis de seconde espèce et de troisième catégorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Détermination des couples de nombres entiers qui fixent la structure d'un point uni de seconde espèce et de troisième catégorie d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique, c'est-à-dire d'un point uni auquel correspond, sur une surface image de l'involution, un point de diramation en lequel le cône tangent à la surface se scinde en quatre cônes rationnels.

Dans un mémoire récent [1], nous avons étudié les points unis isolés d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique et nous avons en particulier considéré les points unis, que nous disons de seconde espèce et de troisième catégorie, caractérisés de la manière suivante : Le point de diramation homologue d'un tel point sur une surface image de l'involution possède un cône tangent à la surface qui se scinde en quatre cônes rationnels. Comme on sait, pour étudier la structure d'un point uni A, nous considérons les multiplicités en A d'une suite de courbes C_0', C_0'', ... et ces multiplicités dépendent des solutions en nombres entiers λ, μ d'une certaine congruence. Dans le cas d'un point uni de seconde espèce et de troisième catégorie, nous avons pu former deux suites de solutions λ_1', μ_1' ; λ_2', μ_2' ; ... et

(1) *Mémoire sur les surfaces multiples* (MÉMOIRES IN-8° DE L'ACADÉMIE ROY. DE BELGIQUE, 1952).

λ_2'', μ_2'' ; λ_2'', μ_2'', ... de cette congruence (¹). Dans cette note, nous montrons que l'on a $\lambda_1' = \lambda_1''$, $\mu_1' = \mu_1''$, mais que les systèmes de la suite $|C_0''|$, $|C_0'''|$, ... qui correspondent aux autres solutions sont tous distincts. Le problème qui se pose est de déterminer dans quel ordre ces systèmes se succèdent ; c'est là une question que nous espérons pouvoir résoudre.

1. Soit I une involution d'ordre premier impair p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique F. Fixons l'attention sur l'un, A, de ces points unis qui soit de seconde espèce et de la troisième catégorie. A ce point sont attachés deux entiers α, β, compris entre 1 et p, tels que $\alpha\beta - 1$ soit multiple de p. Si l'on désigne par λ_1, μ_1 deux entiers positifs solutions des congruences

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \quad \mu + \beta\lambda \equiv 0, \quad (\text{mod. } p) \tag{1}$$

tels que la somme $\lambda_1 + \mu_1$ soit la plus petite possible, on a

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = hp, \quad \mu_1 + \beta\lambda_1 = kp,$$

où h, k sont supérieurs à l'unité.

Désignons par Φ une surface normale image de l'involution I telle qu'à ses sections hyperplanes Γ correspondent sur F des courbes C_0 ne passant pas par les points unis de l'involution. On peut d'ailleurs supposer que les courbes C_0 appartiennent à un système linéaire complet $|C|$ contenant p systèmes linéaires partiels $|C_0|$, $|C_1|$, ..., $|C_{p-1}|$ appartenant à l'involution, le premier étant dépourvu de points-base et les autres ayant pour points-base les points unis de l'involution.

Si A′ est le point de diramation qui correspond sur Φ au point A, nous avons montré que ce point était multiple pour la surface et que le cône tangent à celle-ci en ce point se décomposait en quatre cônes rationnels.

Précisons davantage. Soient C_0' les courbes C_0 passant par le point A ; elles ont en ce point la multiplicité $\lambda_1 + \mu_1$ et λ_1 tan-

(¹) Nous avons simplifié la formation de ces solutions dans une communication au *Second Colloque de Géométrie algébrique*, tenu à Liège du 9 au 12 février 1952. Le volume, en cours d'impression, paraîtra chez Thone, à Liège et à la Librairie Masson, à Paris.

gentes confondues avec la première tangente t_1 unie pour l'involution et μ_1 tangentes confondues avec la seconde tangente t_2 unie pour l'involution. Si nous projetons de A' la surface Φ sur un hyperplan de l'espace ambiant, nous obtenons une surface Φ_1 dont les sections hyperplanes Γ_0' correspondent aux courbes C_0'.

Posons

$$p = a\alpha + b = a' + b'\beta$$

où $b < \alpha$, $a' < \beta$. Le point A' est équivalent à quatre courbes rationnelles σ_1, τ_1, τ_2, σ_2 tracées sur la surface Φ_1. La courbes σ_1 est d'ordre a, la courbe τ_1 d'ordre m, la courbe τ_2 d'ordre n, la courbe σ_2 d'ordre b'. Chacune des courbes σ_1, τ_1, τ_2, σ_2 rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres.

2. Il existe un nombre $h_1 > 1$ tel que l'on a

$$(h_1 - 1)(a + b) < \alpha - 1 < h_1(a + b),$$
$$(h_1 - 1)b < \alpha < h_1 b.$$

Parmi les solutions des congruences (1) donnant $\lambda + \mu < p$, on trouve

$$\lambda_1' = m(h_1 b - \alpha) - (m - 1)b, \qquad \mu_1' = m(h_1 a + 1) - (m - 1)a,$$
$$\lambda_2' = (m - 1)(h_1 b - \alpha) - (m - 2)b, \qquad \mu_2' = (m - 1)(h_1 a + 1) - (m - 2)a,$$

. . . .

$$\lambda_i' = (m + 1 - i)(h_1 b - \alpha) - (m - i)b, \qquad \mu_i' = (m + 1 - i)(h_1 a + 1) - (m - i)c,$$

. . . .

$$\lambda_m' = h_1 b - \alpha \qquad u_m' = h_1 a + 1.$$

On a

$$h = mh_1 - m + 1.$$

De même, il existe un nombre $k_1 > 1$ tel que

$$(k_1 - 1)(a' + b') < \beta - 1 < k_1(a' + b'),$$
$$(k_1 - 1)a' < \beta < k_1 a'.$$

Parmi les solutions des congruences (1) on trouve

$$\lambda_1'' = n(k_1 b' + 1) - (n-1)b',$$
$$\mu_1'' = n(k_1 a' - \beta) - (n-1)a',$$
$$\lambda_2'' = (n-1)(k_1 b' + 1) - (n-2)b',$$
$$\mu_2'' = (n-1)(k_1 a' - \beta) - (n-2)a',$$

....

$$\lambda_i'' = (n+1-i)(k_1 b' + 1) - (n-i)b',$$
$$\mu_i'' = (n+1-i)(k_1 a' - \beta) - (n-i)a',$$

....

$$\lambda_n'' = k_1 b' + 1, \qquad \mu_n'' = k_1 a' - \beta.$$

On a

$$k = nk_1 - n + 1.$$

3. On a évidemment

$$\lambda_1 = \lambda_1' = \lambda_1'', \quad \mu_1 = \mu_1' = \mu_1''.$$

Si nous posons

$$a\beta - 1 = q.p, \quad a'a + b' = h'p, \quad a + b\beta = k'p,$$

on a

$$h = kh' - nq,$$
$$k = hk' - mq.$$

On obtient ces relations en calculant

$$\lambda_1' + a\mu_1' = \lambda_1'' + a\mu_1'',$$
$$\mu_1' + \beta\lambda_1' = \mu_1'' + \beta\lambda_1''.$$

4. Désignons par C_0'' les courbes C_0' assujetties à toucher en A une direction distincte de t_1, t_2. Soit λ_2, μ_2 la solution des congruences (1) qui leur correspond. Les courbes C_0'' ont en A la multiplicité $\lambda_2 + \mu_2 > \lambda_1 + \mu_1$; elles ont, en A, λ_2 tangentes confondues avec t_1 et μ_2 avec t_2. Il leur correspond sur Φ_1 les courbes Γ_0'' passant par le point A_1' commun aux courbes τ_1, τ_2. Si nous projetons Φ_1 de A_1' sur un hyperplan de l'espace ambiant, nous obtenons une surface Φ_2 sur laquelle se trouve tracées : une courbe σ_1 d'ordre a, une courbe τ_1 d'ordre $m-1$, une courbe τ_2 d'ordre $n-1$, une courbe σ_2 d'ordre b' et une ou plusieurs courbes rationnelles correspondant au domaine de A_1' sur Φ_1.

Observons que A_1' peut être simple, double conique ou double biplanaire pour Φ_1. Dans le premier cas, Φ_2 contient une droite exceptionnelle ρ_0 s'appuyant sur τ_1 et τ_2 ; dans le second cas, Φ_2 contient une conique ρ, de degré virtuel -2, rencontrant τ_1 et τ_2 ; enfin, dans le troisième cas, Φ_2 contient deux droites ρ_1, ρ_2 de degré virtuel -2, se rencontrant en un point et s'appuyant ρ_1 sur τ_1 et ρ_2 sur τ_2.

Comme nous l'avons montré, les courbes σ_1, τ_1, τ_2, σ_2 représentent les domaines de points unis de première espèce P_1, Q_1, Q_2, P_2 appartenant à des domaines d'un certain ordre du point A. Sur les courbes C_0', le point A est l'origine de a branches linéaires passant par P_1, de b' branches linéaires passant par P_2, de m branches superlinéaires passant par Q_1 et de n branches superlinéaires passant par Q_2. Sur les courbes C_0'', le point A est l'origine de $a+b'$ branches linéaires passant a par P_1, b' par P_2, de $m+n-2$ branches superlinéaires passant $m-1$ par Q_1, $n-1$ par Q_2. Mais le point A doit encore être l'origine de une ou deux branches superlinéaires passant soit par un point R, soit par deux points R_1, R_2, unis de première espèce, appartenant à certains domaines du point A.

Précisément, si A_1' est simple pour Φ_1, il y a une branche superlinéaire passant par un point R dont le domaine est représenté par la droite exceptionnelle ρ_0 ; si A_2' est double conique pour Φ_1, le point A est l'origine de deux branches superlinéaires passant par le point R et le domaine de celui-ci est représenté par la conique ρ ; si A_1' est double biplanaire pour Φ_1, le point A est sur les courbes C_0'' l'origine de deux branches superlinéaires passant l'une par R_1, l'autre par R_2 et les domaines de ces points sont respectivement représentés par les droites ρ_1, ρ_2.

5. Nous avons établi que si $\lambda_2 = \lambda_2'$, $\mu_2 = \mu_2'$, le point A est l'origine, sur les courbes C_0'', de a branches linéaires passant par P_1 et de $m-1$ branches superlinéaires passant par Q_1. De même, si l'on avait $\lambda_2 = \lambda_2''$, $\mu_2 = \mu_2''$, le point A serait l'origine, sur les courbes C_0'', de b' branches linéaires passant par P_2 et de $m - 1$ branches superlinéaires passant par Q_2.

Supposons $m > 1$, $n > 1$. Si l'on avait $\lambda_2 = \lambda_2' = \lambda_2''$, $\mu_2 = \mu_2' = \mu_2''$, le point A serait donc, sur les courbes C_0'', l'origine de $a + b' + m + n - 2$ branches, alors qu'il doit être l'origine de $a + b' + m + n - 1$ branches au moins. Le cas envisagé ne peut donc se présenter.

D'ailleurs, d'après ce que nous avons établi, on a

$$\lambda_2' + \mu_2' > \lambda_1 + \mu_1, \quad \mu_2' < \mu_1' \text{ ou } \mu_1$$

et

$$\lambda_2'' + \mu_2'' > \lambda_1 + \mu, \quad \lambda_2'' < \lambda_1'' \text{ ou } \lambda_1.$$

On a donc ici une contradiction si $\lambda_2' = \lambda_2''$, $\mu_2' = \mu_2''$.

De tout ceci résulte que si $m > 1$, $n > 1$, les cas suivants peuvent se présenter :

a) $\lambda_2 + \mu_2 < \lambda_2' + \mu_2'$ et $\lambda_2 + \mu_2 < \lambda_2'' + \mu_2''$;

b) $\lambda_2 = \lambda_2'$, $\mu_2 = \mu_2'$ et $\lambda_2 + \mu_2 < \lambda_2'' + \mu_2''$;

c) $\lambda_2 = \lambda_2''$, $\mu_2 = \mu_2''$ et $\lambda_2 + \mu_2 < \lambda_2' + \mu_2'$.

Observons du reste que les nombres

$$\lambda_1 + \mu_1, \; \lambda_2' + \mu_2', \ldots, \; \lambda_i' + \mu_i', \ldots, \; \lambda_m' + \mu_m' \tag{2}$$

vont en croissant, tandis que les nombres

$$\mu_1, \mu_2', \ldots, \quad \mu_i', \ldots, \mu_m'$$

vont en décroissant. De même, les nombres

$$\lambda_1 + \mu_1, \; \lambda_2'' + \mu_2'', \ldots, \; \lambda_j'' + \mu_j'', \ldots, \; \lambda_n'' + \mu_n'' \tag{3}$$

vont en croissant, tandis que les nombres

$$\lambda_1, \lambda_1'', \ldots, \quad \lambda_j'', \ldots, \lambda_n''$$

vont en décroissant.

Un raisonnement analogue à celui qui a été fait dans l'hypothèse $\lambda_2' = \lambda_2''$, $\mu_1' = \mu_2''$ montre que l'on ne peut avoir $\lambda_i' = \lambda_j''$, $\mu_i' = \mu_j''$. Il en résulte que les nombres de la suite (2) et de la suite (3) s'intercalent les uns dans les autres.

6. Supposons maintenant $m > 1$ et $n = 1$. Il existe alors un seul couple de nombres λ_1'', μ_1'' et la solution $\lambda_2'' = b'$, $\mu_2'' = a'$ donne

$$\lambda_2'' + \mu_2'' > \lambda_1'' + \mu_1'' \qquad \text{ou} \qquad \lambda_1 + \mu_1.$$

On n'a pas nécessairement $\lambda_2'' = \lambda_2'$, $\mu_2'' = \mu_2'$, comme nous allons le montrer sur un exemple que nous avons traité récemment (¹).

Dans cet exemple, nous avions $p = 10\nu + 1$, ν étant de la forme $3t$ ou $3t + 1$. Nous avons ensuite $\alpha = 5\nu + 3$, $\beta = 6\nu + 1$, $m = \nu - 1$, $n = 1$. On en déduit

$$a = 1,\ b = 5\nu - 2\ ; \qquad a' = 4\nu,\ b' = 1\ ;$$

$$h_1 = 2,\ k_1 = 2, \qquad q = 3\nu + 2,\ h = \nu.$$

On a

$$\lambda_1 = 3,\ \mu_1 = 2\nu - 1\ ; \qquad \lambda_2' = 8,\ \mu_2' = (2\nu - 3)\ ;\ \ldots\ ;$$

$$\lambda_i = 5i - 2,\ \mu_i = 2\nu - 2i + 1,\ \ldots.$$

Nous aurons donc

$$\lambda_i' + \mu_i' = 2\nu + 3i - 1$$

et

$$\lambda_2'' + \mu_2'' = a' + b' = 4\nu + 1.$$

La somme $\lambda_2'' + \mu_2''$ vient s'intercaler entre les sommes

$$\lambda_{2t}' + \mu_{2t}' \qquad \text{et} \qquad \lambda_{2t+1}' + \mu_{2t+1}'$$

si $\nu = 3t$; entre les sommes

$$\lambda_{2t+1}' + \mu_{2t+1}' \qquad \text{et} \qquad \lambda_{2t+2}' + \mu_{2t+2}'$$

si $\nu = 3t + 1$.

Liège, le 30 novembre 1952.

(¹) *Sur un point de diramation d'une surface multiple en lequel le cône tangent se décompose en quatre parties.* (En cours de publication dans les RENDICONTI DEL SEMINARIO MATEMATICO DI TORINO, vol. XI).