Sur la représentation analytique de la conique dans l'espace (*); par Lucien Godeaux, étudiant en mathématique.

Il est utile, pour l'étude des systèmes de coniques de l'espace, de posséder une représentation analytique de la conique. Nous en donnons trois différentes dans ce petit travail.

1. — Désignons, suivant la notation de Clebsch et Aronhold, par a_x une forme linéaire des coordonnées ponctuelles (x_1, x_2, x_3, x_4) de l'espace, par a_x^2 une forme quadratique quelconque, etc.

Le lieu des points qui rendent nulle la matrice

$$\begin{Vmatrix} a_x^2 & a_x' & a'' \\ b_x^2 & b_x' & b'' \end{Vmatrix} = 0, \qquad (1)$$

est la conique commune au plan

$$a''b_x' - b''a_x' = 0 \qquad (2)$$

et à la quadrique

$$a''b_x^2 - b''a_x^2 = 0. \qquad (3)$$

Cette conique est située sur la surface cubique

$$a_x'b_x^2 - b_x'a_x^2 = 0,$$

dont l'intersection avec le plan (2) se complète par la droite

$$a_x' = 0, \qquad b_x' = 0,$$

et avec la quadrique (3) par la courbe biquadratique de première espèce

$$a_x^2 = 0, \qquad b_x^2 = 0.$$

(*) Extrait des *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), n° 11, pp. 896-902, 1908.

2. — On peut se proposer de calculer la condition pour que la conique représentée par la matrice (1) dégénère.

L'équation tangentielle de la quadrique (3) est

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & o \\ a''b_{11}-b''a_{11} & a''b_{21}-b''a_{21} & a''b_{31}-b''a_{31} & a''b_{41}-b''a_{41} & u_1 \\ a''b_{12}-b''a_{12} & a''b_{22}-b''a_{22} & a''b_{32}-b''a_{32} & a''b_{42}-b''a_{42} & u_2 \\ a''b_{13}-b''a_{13} & a''b_{23}-b''a_{23} & a''b_{33}-b''a_{33} & a''b_{43}-b''a_{43} & u_3 \\ a''b_{14}-b''a_{14} & a''b_{24}-b''a_{24} & a''b_{34}-b''a_{34} & a''b_{44}-b''a_{44} & u_4 \end{vmatrix} = 0,$$

u_1, u_2, u_3 et u_4 étant les coordonnées courantes.

Pour abréger, nous écrirons cette équation

$$\begin{vmatrix} u_i & o \\ a''b_{ik} - b''a_{ik} & u_k \end{vmatrix} = 0 \quad (i, k = 1, \dots 4).$$

La conique (1) dégénère lorsque le plan (2) est tangent à la quadrique (3), donc lorsque l'on a

$$\begin{vmatrix} a''b'_i - b''a'_i & o \\ a''b'_{ik} - b''a'_{ik} & a''b'_k - b''a'_k \end{vmatrix} = 0 \quad (i, k = 1, \dots 4).$$

Pour exprimer que la conique (1) est tangente au plan $v_x = 0$, il suffit d'exprimer que les plans tangents à la quadrique (3) menés par la droite commune au plan (1) et au plan donné sont confondus.

Un plan quelconque passant par cette droite a pour coordonnées

$$\lambda v_i + a''b'_i - b''a'_i \qquad (i = 1, \dots 4).$$

Les paramètres des plans tangents à la quadrique (3) sont donnés par

$$\begin{vmatrix} \lambda v_i + a''b'_i - b''a'_i & o \\ a''b_{ik} - b''a_{ik} & \lambda v_k + a''b'_k - b''a'_k \end{vmatrix} = 0 \quad (i,k = 1,\dots 4).$$

Cette équation peut s'écrire

$$\lambda^2 \begin{vmatrix} v_i & o \\ a''b_{ik} - b''a_{ik} & v_k \end{vmatrix} + 2\lambda \begin{vmatrix} a''b'_i - b''a'_i & o \\ a''b_{ik} - b''a_{ik} & v_k \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a''b'_i - b''a'_i & o \\ a''b_{ik} - b''a_{ik} & a''b'_k - b''a'_k \end{vmatrix} = 0.$$

Pour que les deux racines soient égales, on doit avoir

$$\begin{vmatrix} a''b'_i - b''a'_i & o \\ a''b_{ik} - b''a_{ik} & v_k \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} v_i & o \\ a''b_{ik} - b''a_{ik} & v_k \end{vmatrix}$$

$$\times \begin{vmatrix} a''b'_i - b''a'_i & o \\ a''b_{ik} - b''a_{ik} & a''b'_k - b''a'_k \end{vmatrix} = 0, \quad (i, k = 1, \dots 4)$$

et telle est la condition cherchée.

On trouve d'une manière simple que la condition pour que la conique (1) s'appuie sur une droite donnée par deux de ses points y, z est

$$\begin{vmatrix} a_y^2 & 2a_y a_z & a_z^2 & b_y^2 & 2b_y b_z & b_z^2 \\ o & a'_y & a'_z & o & b'_y & b'_z \\ a'_y & a'_z & o & b'_y & b'_z & o \\ o & o & a'' & o & o & b'' \\ o & a'' & o & o & b'' & o \\ a'' & o & o & b'' & o & o \end{vmatrix} = 0.$$

3. — La matrice

$$\begin{Vmatrix} a_x^2 & b_x & c_x \\ a'_x & b' & c' \end{Vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

s'annule pour les points d'une conique dont le plan pour équation

$$b'c_x - c'b_x = 0,$$

et qui est située à la fois sur les deux quadriques

$$b'a_x^2 - b_x a'_x = 0, \qquad c'a_x^2 - c_x a'_x = 0.$$

La condition pour que la conique (4) dégénère peut s'exprimer de deux manières :

$$\begin{vmatrix} 2b'a_{ik} - (a'_i b_k + a'_k b_i) & b'c_k - c'b_k \\ b'c_i - c'b_i & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2c'a_{ik} - (a'_i c_k + a'_k c_i) & b'c_k - c'b_k \\ b'c_i - c'b_i & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour que la conique (4) soit tangente au plan

$$v_x = 0,$$

on doit avoir l'une ou l'autre des conditions (l'une entraînant l'autre)

$$\begin{vmatrix} b'c_i - c'b_i & 0 \\ 2b'a_{ik} - (a'_i b_k + a'_k b_i) & v_k \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} v_i & 0 \\ 2b'a_{ik} - (a'_i b_k + a'_k b_i) & v_k \end{vmatrix}$$

$$\times \begin{vmatrix} b'c_i - c'b_i & 0 \\ 2b'a_{ik} - (a'_i b_k + a'_k b_i) & b'c_k - c'b_k \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} b'c_i - c'b_i & & o \\ 2c'a_{ik} & (a'_i c_k + a'_k c_i) & v_k \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} v_i & o \\ 2c'a_{ik} - (a'_i c_k + a'_k c_i) & v_k \end{vmatrix}$$

$$\times \begin{vmatrix} b'c_i - c'b_i & o \\ 2b'a_{ik} - (a'_i c_k + a'_k c_i) & b'c_k - c'b_k \end{vmatrix} = 0.$$

De même, la condition pour que la conique (4) rencontre une droite yz s'exprime

$$\begin{vmatrix} a_y^2 & 2a_y a_z & a_z^2 & a'_y & a'_z \\ & b_y & b_z & & b' \\ b_y & b_z & & b' & \\ & c_y & c_z & & c' \\ c_y & c_z & c' & & \end{vmatrix} = 0.$$

4. — On peut encore représenter la conique comme nous l'avons fait dans un travail récent (*).

Une quadrique passant par cinq points d'une conique la contient tout entière, donc toutes les coniques de l'espace sont situées sur les quadriques du système

$$\sum_{j=1}^{6} \mu_j a j_x^2 = 0, \tag{5}$$

$a1_x^2, \ldots, a6_x^2$ étant les premiers membres des équations de six quadriques linéairement indépendantes.

Une conique est représentée par l'équation

$$u_x = 0 \tag{6}$$

jointe à l'équation (5).

(*) *Détermination des variétés de complexes bilinéaires de coniques*. (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE [Classe des sciences], n° 6, 1908 pp. 597-601.)

A une conique de l'espace correspond un système de valeurs des μ et des u, et inversement. On doit rejeter les systèmes

$$(\mu_j = 0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad u_4), \qquad (j = 1, \dots 6).$$

$$(\mu_1, \quad \mu_2, \dots, \mu_6, \quad u_i = 0), \qquad (i = 1, \dots 4).$$

La condition pour qu'une conique dégénère s'exprime par l'évanouissement du déterminant

$$\begin{vmatrix} u_i & 0 \\ \sum_{j=1}^{6} \mu_j a j_{ik} & u_k \end{vmatrix} = 0, \qquad (i, k = 1, \dots 4).$$

Pour que la conique représentée par les équations (5) et (6) soit tangente au plan $v_x = 0$, on doit avoir

$$\begin{vmatrix} u_i & 0 \\ \sum_{j=1}^{6} \mu_j a j_{ik} & v_k \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} u_i & 0 \\ \sum_{j=1}^{6} \mu_j a j_{ik} & u_k \end{vmatrix}$$
$$\times \begin{vmatrix} v_i & 0 \\ \sum_{j=1}^{6} \mu_j a j_{ik} & v_k \end{vmatrix} = 0, \qquad (i, k = 1, \dots 4).$$

Enfin, la condition pour que la conique rencontre la droite yz est

$$\begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{6} \mu_j a j_y^2 & 2\sum_{j=1}^{6} \mu_j a j_y a j_z & \sum_{j=1}^{6} \mu_j a j_z^2 \\ & u_y & u_z \\ u_y & u_z & \end{vmatrix} = 0.$$

La représentation de la conique par les équations (1) ou (4) peut servir lorsque l'on étudie les congruences de coniques en suivant la méthode développée par M. Stuyvaert pour les congruences de cubiques gauches (*). Nous nous en sommes servi dans un petit article adressé récemment à la rédaction de la *Grünert's Archiv*. La dernière représentation est utile lorsque l'on recherche l'équation de la surface focale d'une congruence par la méthode infinitésimale (**).

Liége, 27 septembre 1908.

(*) *Cinq études de géométrie analytique*. Gand, Van Goethem, 1908.

(**) DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, chap. Ier, pp. 1-22.

Bruxelles. — Imprimerie HAYEZ, rue de Louvain, 112.