SUR LES SURFACES POSSÉDANT UNE DROITE MULTIPLE;

Par M. Lucien GODEAUX.

Dans cette Note, nous donnons une démonstration simplifiée d'un théorème dû à M. G. Fouret sur le nombre des plans tangents à une surface algébrique menés par une droite multiple de cette surface ([1]). Ensuite, nous calculons la classe d'une telle surface.

1. Soit F une surface algébrique d'ordre n possédant comme seule singularité une droite d multiple d'ordre $r\,(r < n)$. Soit ν le nombre de plans passant par d et touchant la surface F en un point non situé sur d.

Choisissons un plan quelconque π ne passant pas par d. Tout plan α passant par d rencontre la surface F suivant une courbe C_α d'ordre $n - r$ et le plan π suivant une droite d'. Évidemment le nombre ν cherché est égal au nombre des courbes C_α douées d'un point double, car la polaire d'ordre $n - r - 1$ d'un tel point par rapport à la C_α qui le contient peut être une droite quelconque du plan de cette courbe, en particulier d'; donc nous devons d'abord chercher l'ordre k de la courbe K lieu des pôles des droites d' par rapport aux courbes C_α.

([1]) *Sur le nombre de plans tangents qu'on peut mener à une surface algébrique par une droite multiple de cette surface* (*Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo,* 1894, t. VIII, p. 202-208).

Le nombre k est évidemment égal au nombre de courbes C_α qui touchent le plan π; donc, d'après une formule connue,

$$k = (n + r)(n - r - 1).$$

Les pôles d'une droite par rapport à une courbe d'ordre $n - r$ sont au nombre de

$$(n - r - 1)^2;$$

donc la courbe K rencontre la droite d en

$$(2r + 1)(n - r - 1)$$

points.

Pour trouver ν, il nous suffira de compter le nombre de points où K rencontre F ailleurs que sur d ou dans le plan π; on trouve

$$\nu = (n - r - 1)[n(n + r - 1) - 2r(r + 1)].$$

Le nombre des plans tangents menés à une surface d'ordre n par une droite multiple d'ordre r, le point de contact n'étant pas sur cette droite, est égal à

$$(n - r - 1)[n(n + r - 1) - 2r(r + 1)].$$

On connaît de nombreux cas particuliers de cette formule, notamment pour $r = n - 2$ [1].

2. Rappelons un théorème de MM. Zeuthen et Segre [2] :

---

(1) L. Godeaux, *Notes de Géométrie* (*Mémoires de la Soc. des Sc. de Liége*, 1908, 3e série, t. VIII); *A propos d'un article de M. H. Bateman* (*Archiv der Mathematik und Physik*, 1908, 3e série, t. XIII, p. 370).

(2) G. Castelnuovo et F. Enriquès, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche* (*Annali di Matematica*, 1901, 3e série, t. VI, p. 162-225).

Étant donné sur une surface un faisceau rationnel de courbes de genre p, doué de σ points de base et de δ courbes à point double (simple pour la surface), le nombre

$$I = \delta - \sigma - 4p$$

ne dépend pas du faisceau considéré.

Formons l'expression I pour notre surface F par la considération des courbes C_α. Évidemment, il n'existe pas de points de base, puisque nous avons supposé F n'ayant que la droite multiple comme singularité; donc $\sigma = 0$. Nous venons de trouver

$$\delta = (n - r - 1)[n(n + r - 1) - 2r(r + 1)].$$

Enfin, le genre p de C_α est donné par une formule bien connue :

$$p = \frac{1}{2}(n - r - 1)(n - r - 2).$$

Donc

$$I = (n - r - 1)[n(n + r - 3) - 2(r^2 - 2)]. \tag{1}$$

Considérons maintenant les sections planes de F situées dans les plans d'un faisceau et calculons l'invariant de Zeuthen-Segre au moyen de ce système de courbes. En appelant m la classe de F, on trouve

$$\delta = m \quad \text{et} \quad \sigma = n.$$

Une section plane de F contient un point multiple d'ordre r, donc équivalent à $\frac{1}{2}r(r - 1)$ points doubles, et, par suite,

$$p = \frac{1}{2}[(n - 1)(n - 2) - r(r - 1)].$$

De là, une nouvelle expression de I :

$$(2)\qquad I = m - (n - r - 1)(2n + 2r - 3) - (r + 1).$$

En égalant les deux expressions de I, on trouve

$$m = (n - r - 1)[n(n + r - 1) - r(2r - 1)] + (r + 1)(n - r).$$

Une surface d'ordre n possédant comme seule singularité une droite multiple d'ordre r est de la classe

$$(n - r - 1)[n(n + r - 1) - r(2r - 1)] + (r + 1)(n - r).$$

3. Supposons que la surface F possède, sur la droite multiple d, ρ points multiples d'ordre $r + 1$. Évidemment, on a

$$\rho \leqq n - r.$$

Alors l'expression (1) de l'invariant de Zeuthen-Segre doit être modifiée, car le faisceau considéré a ρ points de base. Il en résulte que la classe m de la surface F est diminuée de ρ unités.

4. Nous allons donner une application des résultats précédents aux complexes de coniques.

Soit Σ un complexe de coniques d'ordre μ et de classe ν [caractéristiques de M. Montesano (1)].

Les coniques du complexe situées dans les plans d'un faisceau engendrent une surface d'ordre $2\mu + \nu$ possédant une droite multiple d'ordre ν. D'après le théorème de M. Fouret, il y a

$$(2\mu - 1)^2(2\mu + 3\nu)$$

(1) *Una estensione della proiettivita a gruppi di complessi e di congruenze lineari di rette* (*Annali di Matematica*, 1898, 3e série, t. I, p. 313).

plans tangents à cette surface menés par la droite multiple, c'est-à-dire un nombre égal de coniques dégénérées.

Les plans des coniques dégénérées d'un complexe d'ordre μ *et de classe* ν *enveloppent une surface de classe*

$$(2\mu - 1)^2(2\mu + 3\nu).$$

5. L'extension aux hyperespaces peut se faire aisément; nous nous bornerons à donner ici le résultat.

Si l'on désigne par $\nu_{(p,n,r)}$ le nombre d'espaces linéaires à $p - 1$ dimensions tangents à une variété d'ordre n à $p - 1$ dimensions et passant par un espace linéaire à $p - 2$ dimensions multiple d'ordre r pour la variété, on a

$$\nu_{(p,n,r)} = (n - r - 1)\left[\nu_{(p-1,n,r)} + r(n - r - 1)^{p-2}\right].$$

De cette formule on tire par un calcul très simple

$$\nu_{(p,n,r)} = (n - r - 1)^{p-2}\left\{n[n + r(p-2) - 1] - r(p-1)(r+1)\right\}.$$

Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4e série, t. IX avril 1909.)