Bulletin de la Classe des sciences

Sur les systèmes canonique et pluricanonique d’une surface de genre linéaire un

Lucien Godeaux

Résumé
Construction d’une surface algébrique dont les systèmes pluri-canoniques sont composés au moyen d’un faisceau linéaire de courbes elliptiques, la courbe canonique étant une courbe partielle de ce faisceau.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE.

Sur les systèmes canonique et pluricanoniques d'une surface de genre linéaire un,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Construction d'une surface algébrique dont les systèmes pluri-canoniques sont composés au moyen d'un faisceau linéaire de courbes elliptiques, la courbe canonique étant une courbe partielle de ce faisceau.

Dans cette note, nous considérons la surface image d'une involution cyclique du septième ordre, appartenant à une surface du sixième ordre, dépourvue de points multiples, cette involution n'ayant que trois points unis. Cette surface image, Φ, contient un faisceau de courbes elliptiques $|\gamma|$ dont une courbe est dégénérée en une courbe elliptique γ_0, comptée trois fois et une autre en trois courbes rationnelles. La courbe canonique de la surface est la courbe γ_0 comptée deux fois, le système bicanonique est formé des courbes $\gamma_0 + \gamma$, le système tricanonique est formé des courbes 2γ, et ainsi de suite. Par conséquent la *surface Φ a les genres*

$$p^{(1)} = 1,\ p_a = p_g = 1,\ P_2 = 2,\ P_3 = 3, \ldots,\ P_{3i} = 2i + 1,$$
$$P_{3i+1} = 2i + 1,\ P_{3i+2} = 2i + 2, \ldots$$

Nous construisons un modèle projectif normal de la surface Φ sous forme d'une surface du douzième ordre et la projection de ce modèle, à partir d'un point multiple d'ordre six pour la surface, est une surface du sixième ordre possédant trois points triples. En chacun de ces points, le cône tangent se scinde en deux plans dont l'un est compté deux fois ; dans ce plan et dans le voisinage du point triple, la surface contient une droite double infiniment petite.

Pour l'étude des points unis de l'involution que nous avons rencontrés dans cette note, nous renverrons aux travaux que nous avons récemment publiés sur cet objet [1] :

1. Considérons la surface F, du sixième ordre, d'équation

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^5x_2 + a_{12}x_2^5x_3 + a_{13}x_3^5x_1 + x_4(a_{21}x_1^3x_2^2 + a_{22}x_2^3x_3^2 + a_{23}x_3^3x_1^2) \\ + x_4^2(a_{31}x_1^3x_3 + a_{32}x_2^3x_1 + a_{33}x_3^3x_2) \\ + a_1(x_1x_2x_3)^2 + a_2x_4^3x_1x_2x_3 + a_3x_4^6 = 0. \end{aligned}$$

Elle est transformée en soi par l'homographie

$$H = \begin{pmatrix} x_1 & \epsilon x_2 & \epsilon^3 x_3 & \epsilon^6 x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

de période sept, ϵ étant une racine primitive d'ordre sept de l'unité.

L'homographie H possède quatre point unis : les sommets O_1, O_2, O_3, O_4 du tétraèdre de référence ; les trois premiers appartiennent à la surface F et sont simples pour cette surface. Sur F, H engendre une involution d'ordre sept, I_7, n'ayant que trois points unis.

Soit Φ une surface normale, image de l'involution I_7, aux sections hyperplanes de laquelle correspondent, sur F, les courbes d'un système linéaire privé de points-base. Désignons par O_1', O_2', O_3' les points de diramation correspondant respectivement aux points unis O_1, O_2, O_3. Pour déterminer la singularité de la surface Φ aux points O_1', O_2', O_3', il suffira de le faire pour un de ces points, par exemple pour le point O_1', à cause de la symétrie de l'équation de F par rapport à x_1, x_2, x_3.

Le plan tangent à F en O_1 est $x_2 = 0$ et dans ce plan, H détermine une homographie que l'on peut représenter soit par

$$\begin{pmatrix} x_1 & \eta x_3 & \eta^2 x_4 \\ x_1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

en posant $\eta = \epsilon^3$, soit par

$$\begin{pmatrix} x_1 & \zeta^4 x_3 & \zeta x_4 \\ x_1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

[1] *Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1949, pp. 15-30, 270-284, 285-292, 532-541, 636-641, 828-833, 834-840).

en posant $\zeta = \epsilon^6$. Les entiers attachés à O_1 sont donc $\alpha = 2$, $\beta = 4$.

On en conclut que O_1 possède un point uni de première espèce (1,1), situé sur la droite O_1O_3, infiniment voisin de O_1 et une suite de points unis (2,1), (2,2), (2,3), dont le dernier seul est de première espèce, infiniment voisins successifs de O_1, le premier étant sur la droite O_1O_4.

Le point O_1' est par conséquent quadruple pour la surface Φ, le cône tangent en ce point étant formé d'un cône cubique rationnel et d'un plan rencontrant le cône cubique suivant une droite.

Au point de vue des transformations birationnelles, le point O_1' est équivalent à deux courbes rationnelles : σ_{11}, de degré virtuel -4 et σ_{12}, de degré virtuel -2. De même, les points O_2', O_3' sont respectivement équivalents à des couples de courbes rationnelles, σ_{21}, σ_{22} et σ_{31}, σ_{32} ; σ_{21} et σ_{31} sont de degré virtuel -4 et σ_{22}, σ_{32} de degré virtuel -2. Les courbes σ_{11} et σ_{12} ont un point commun ; il en est de même des courbes σ_{21} et σ_{22}, σ_{31} et σ_{32}.

2. On peut voir que le point (1,1), infiniment voisin de O_1 sur la droite O_1O_3, est uni de première espèce pour l'involution I_7.

Effectuons en effet la transformation quadratique

$$T = \begin{pmatrix} y_1^2 & y_2y_3 & y_1y_3 & y_3y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

qui fait correspondre au domaine du premier ordre de O_1 le plan $y_3 = 0$ et en particulier au point infiniment voisin de O_1 sur O_1O_3, le point $y_2 = y_3 = y_4 = 0$.

A la surface F correspond la surface F′, du onzième ordre, d'équation

$$\begin{gathered} a_{11}y_1^{10}y_2 + a_{12}y_1y_2^5y_3^5 + a_{13}y_1^7y_3^4 + y_1^2y_3^2y_3(a_{21}y_1^4y_2^2 + a_{22}y_2^3y_3^3 \\ + a_{23}y_1^5y_3) + y_1^2y_3^2y_4^2(a_{31}y_1^5 + a_{32}y_2^3y_3^2 + a_{33}y_1y_2y_3^3) + a_1y_1^6y_2^2y_3^3 \\ + a_2y_1^3y_2y_3^4y_4^3 + a_3y_3^5y_4^6 = 0. \end{gathered}$$

A l'homographie H correspond l'homographie

$$H' = \begin{pmatrix} y_1 & \epsilon^5y_2 & \epsilon^3y_3 & \epsilon^3y_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}.$$

Dans le plan tangent $y_2 = 0$ à F′ en O_1'' (1, 0, 0, 0), cette homographie détermine une homologie de centre O_1''. Ce point est donc bien uni de première espèce pour l'involution. La surface F' contient la droite (simple) $y_2 = y_3 = 0$, qui représente le domaine du premier ordre de O_1 sur la surface F. Cette droite est unie pour l'homographie H' et contient deux points unis de cette homographie : les points (1, 0, 0, 0) qui correspond au point (1, 1) et le point (0, 0, 0, 1).

3. Les courbes canoniques K de la surface Φ rencontrent en deux points chacune des courbes σ_{11}, σ_{21}, σ_{31}. Soient K' les courbes canoniques de F qui correspondent aux courbes K.

Dans le voisinage du point O_1, les courbes K' doivent passer deux fois par le point (1,1) et par conséquent deux fois par le point O_1. En d'autres termes, les courbes K' doivent avoir un tacnode en O_1, la tangente tacnodale étant O_1O_3. Elles doivent de même avoir un tacnode en O_2, la tangente tacnodale étant O_2O_1 et un tacnode en O_3, la tangente tacnodale étant O_3O_2.

La surface F étant d'ordre six, les courbes K' sont découpées par des quadriques. Ces quadriques devant passer par les points O_1, O_2, O_3 et toucher $O_1\,O_3$ en O_1, O_2O_1 en O_2, O_3O_2 en O_3, ont une équation de la forme

$$x_4(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \lambda_3x_3 + \lambda_4) = 0$$

et dégénèrent en deux plans. Puisque K' a des tacnodes en O_1, O_2, O_3, ces deux plans doivent coïncider et on trouve une seule courbe K', découpée sur F par $x_4^2 = 0$.

D'ailleurs, il est évident à priori que la section de F par le plan $x_4 = 0$, comptée deux fois, est une courbe K'. Les quadriques découpant sur F les courbes K' doivent être transformées en elles-mêmes par l'homographie H. L'homographie H transforme x_4^2 en $\epsilon^5x_4^2$ et est l'unique quadrique dont l'équation se reproduise multipliée par ϵ^5 lorsque l'on effectue H.

Soit γ_0 la courbe qui correspond sur Φ à la section de F par $x_4 = 0$. Cette courbe étant de genre dix et contenant les trois points unis de I_7, la courbe γ_0 est, d'après la formule de Zeuthen, de genre un.

La courbe canonique de Φ est unique et formée d'une courbe elliptique γ_0 comptée deux fois. On a $p_a = 1$ et Φ étant régulière de même que F, on a $p_g = 1$.

4. Considérons maintenant le système bicanonique $|2K|$ de Φ et soit $|K'_1|$ son transformé sur F.

Les courbes K'_1 sont découpées sur F par des surfaces du quatrième ordre et parmi celles-ci se trouve la surface $x_4^4 = 0$. Par conséquent, si $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ est l'équation de la surface découpant sur F les courbes K'_1, on doit avoir

$$\varphi(x_1, \epsilon x_2, \epsilon^3 x_3, \epsilon^6 x_4) = \epsilon^3 \varphi(x^1, x_2, x_3, x_4).$$

On en conclut

$$\varphi = \lambda_0 x_1 x_2 x_3 x_4 + \lambda_1 x_1^3 x_3 + \lambda_2 x_2^3 x_1 + \lambda_3 x_3^3 x_2 + \lambda_4 x_4^4.$$

Les courbes K'_1 sont donc comprises parmi les courbes découpées sur F par les surfaces $\varphi = 0$.

Les courbes K'_1 doivent avoir des points au moins quadruples en O_1, O_2, O_3, donc λ_1, λ_2 et λ_3 doivent être nuls. Les courbes K'_1 sont donc comprises parmi les courbes découpées sur F par les surfaces

$$x_4(\lambda_0 x_1 x_2 x_3 + \lambda_4 x_4^3) = 0.$$

Rapportons projectivement les surfaces $\varphi = 0$ aux hyperplans d'un espace linéaire S_4 à quatre dimensions en posant

$$\frac{X_0}{x_1 x_2 x_3 x_4} = \frac{X_1}{x_1^3 x_3} = \frac{X_2}{x_2^3 x_1} = \frac{X_3}{x_3^3 x_2} = \frac{X_4}{x_4^4},$$

Nous obtenons ainsi un modèle projectif de la surface Φ dont les équations sont

$$\begin{gathered} a_{11} X_1^2 X_2 + a_{12} X_2^2 X_3 + a_{13} X_3^2 X_1 + X_0(a_{21} X_1 X_2 + a_{22} X_2 X_3 \\ + a_{23} X_3 X_1) + X_0^2(a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3) + a_1 X_1 X_2 X_3 + a_2 X_0^3 \\ + a_3 X_0^2 X_4 = 0, \\ X_1 X_2 X_3 X_4 = X_0^4. \end{gathered}$$

C'est une surface d'ordre 12. Projetons-la du point $(0, 0, 0, 0, 1)$ sur l'espace $X_4 = 0$. Nous obtenons une surface du sixième ordre, que nous désignerons toujours par Φ, d'équation

$$\begin{gathered} X_1 X_2 X_3 (a_{11} X_1^2 X_2 + a_{12} X_2^2 X_3 + a_{13} X_3^2 X_1) \\ + X_0 X_1 X_2 X_3 (a_{21} X_1 X_2 + a_{22} X_2 X_3 + a_{23} X_3 X_1) \\ + X_0^2 X_1 X_2 X_3 (a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3) \\ + a_1 (X_1 X_2 X_3)^2 + a_2 X_0^3 X_1 X_2 X_3 + a_3 X_0^6 = 0. \end{gathered}$$

Désignons par A_0, A_1, A_2, A_3 les sommets du tétraèdre de référence. Les points A_1, A_2, A_3 sont triples pour la surface et il suffira d'étudier l'un d'eux, par exemple A_1, à cause de la symétrie de l'équation en X_1, X_2, X_3.

Observons que l'unique courbe canonique de Φ est la courbe γ_0, comptée deux fois, découpée par le plan $X_0 = 0$.

5. Le cône tangent à Φ en A_1 se scinde en deux plans : le plan $X_2 = 0$ compté deux fois et le plan $X_3 = 0$.

Effectuons la transformation quadratique

$$T = \begin{pmatrix} Y_0Y_3 & Y_1^2 & Y_2Y_3 & Y_1Y_3 \\ X_0 & X_1 & X_1 & X_3 \end{pmatrix},$$

qui fait correspondre au domaine du premier ordre du point A_1 le plan $Y_3 = 0$.

A la surface Φ correspond la surface Φ' d'équation

$$\begin{aligned} &Y_1^3Y_2(a_{11}Y_1^4Y_2 + a_{12}Y_1Y_2^2Y_2^3 + a_{13}Y_1^4Y_3) \\ &+ Y_0Y_1^3Y_2Y_3(a_{21}Y_1^2Y_2 + a_{22}Y_1Y_2Y_3 + a_{23}Y_1^3) \\ &+ Y_0^2Y_1^3Y_2Y_3(a_{31}Y_1^2 + a_{32}Y_2Y_3 + a_{33}Y_1Y_3) \\ &+ a_1Y_1^6Y_2^2Y_3 + a_2Y_0^3Y_1Y_2Y_3 + a_3Y_0Y_3 = 0. \end{aligned}$$

La surface Φ' passe deux fois par la droite

$$Y_2 = Y_3 = 0,$$

en touchant le plan $Y_2 = 0$ le long de cette droite. L'autre plan tangent à la surface en un point $(y_0, y_1, 0, 0)$ de la droite double a pour équation

$$a_{11}y_1^2Y_2 + 2(a_{13}y_1^2 + a_{23}y_0y_1 + a_{31}y_0^2)Y_3 = 0.$$

On voit donc que chacun des points A_1, A_2, A_3 est triple pour la surface Φ et possède une droite double infiniment voisine respectivement dans les plans $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, $X_1 = 0$.

Les courbes canoniques de Φ sont découpées par les quadriques passant simplement par les points triples et par les droites doubles infiniment voisines. Il existe une seule quadrique satisfaisant à ces conditions, la quadrique $X_0^2 = 0$. On retrouve ainsi le résultat obtenu plus haut.

6. Les courbes bicanoniques de Φ sont découpées soit par les surfaces du quatrième ordre passant doublement par les points triples et par les droites doubles infiniment voisines, soit par les surfaces du quatrième ordre passant trois fois par les points triples et une fois par les droites doubles infiniment voisines.

Aux surfaces rencontrées plus haut qui peuvent découper les courbes K_1' sur F correspondent les surfaces

$$X_0(\lambda_0 X_1 X_2 X_3 + \lambda_4 X_0^3) = 0.$$

Ces surfaces passent trois fois par A_1, A_2, A_3 et touchent respectivement en ces points les plans $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, $X_1 = 0$; elles découpent donc bien sur Φ des courbes bicanoniques.

Désignons par γ les courbes découpées sur Φ par les surfaces

$$\lambda_0 X_1 X_2 X_3 + \lambda_4 X_0^3 = 0 ;$$

elles forment un faisceau qui comprend la courbe γ_0 comptée trois fois. On a

$$K \equiv 2\gamma_0, \quad 2K \equiv \gamma_0 + \gamma$$

et par conséquent Φ a le bigenre $P_2 = 2$.

Pour déterminer le genre des courbes γ, déterminons en premier lieu le genre des courbes Γ découpées sur F par les surfaces

$$\lambda_0 x_1 x_2 x_3 + \lambda_4 x_4^3 = 0.$$

Nous pouvons supposer sans restriction $\lambda_0 = 1$, $\lambda_4 = -1$. La surface cubique se représente alors point par point sur un plan en posant

$$\frac{x_1}{z_1^2 z_3} = \frac{x_2}{z_2^2 z_1} = \frac{x_3}{z_3^2 z_2} = \frac{x_4}{z_1 z_2 z_3}.$$

A la section de cette surface par F correspond la courbe

$$a_{11} z_1^9 z_3^3 + a_{12} z_2^9 z_1^3 + a_{13} z_3^9 z_2^3 + (z_1 z_2 z_3)^2 [a_{21} z_1^5 z_2 + a_{22} z_2^5 z_3 + a_{23} z_3^5 z_1]$$
$$+ z_1 z_2 z_3 [a_{31} z_1^5 z_3^4 + a_{32} z_2^5 z_1^4 + a_{33} z_3^5 z_2^4] + (a_1 + a_2 + a_3)(z_1 z_2 z_3)^4 = 0.$$

Il est facile de voir que cette courbe possède, en chacun des sommets du triangle de référence, trois points triples à chacun desquels sont infiniment voisins successifs deux points triples dont le dernier est ordinaire. Il en résulte que la courbe est de genre 28.

Entre cette courbe et la courbe γ homologue, on a une correspondance (7,1) qui possède, dans le voisinage de chacun des sommets du triangle de référence, trois points unis. Par suite, en appliquant la formule de Zeuthen, la courbe γ est elliptique.

La surface Φ possède donc un faisceau $|\gamma|$ de courbes elliptiques et a donc le genre linéaire $p^{(1)} = 1$.

Désignons par γ_1, γ_2, γ_3 les courbes qui correspondent sur Φ aux sections de la surface F par les plans $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ respectivement.

La section de F par le plan $x_1 = 0$ a pour équation

$$a_{12}x_2^5x_3 + a_{22}x_2^3x_3^2x_4 + a_{33}x_3^2x_4^2x_4 + a_3x_4^6 = 0.$$

Cette courbe possède un point triple en O_3, une tangente étant confondue avec O_3O_4 et deux avec O_3O_2. Sur cette dernière droite, la courbe possède un point double infiniment voisin de O_3. Enfin la courbe passe simplement par O_2 en y touchant O_2O_4. La courbe est donc de genre 6 et l'involution déterminée par H sur la courbe possède quatre points unis, trois dans le voisinage de O_3 et un en O_2. En appliquant la formule de Zeuthen, on trouve que γ_1 est rationnelle. Il en est de même de γ_2, γ_3.

On a

$$\gamma = 3\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3.$$

7. Occupons-nous maintenant des courbes tricanoniques de Φ. Le système tricanonique de Φ contient les courbes

$$2\gamma_0 + \gamma_0 + \gamma,$$

formées de la courbe canonique et d'une courbe bicanonique, c'est-à-dire les courbes 2γ. Nous allons voir qu'il n'y en a pas d'autres.

Aux courbes tricanoniques de Φ correspondent sur F des courbes K_2' qui appartiennent au système tricanonique de F et sont par conséquent découpées sur cette surface par des surfaces du sixième ordre. L'équation d'une de ces surfaces contient le terme x_4^6 et par conséquent, lorsque l'on applique H à l'équation en question, elle se reproduit multipliée par ϵ. Il en résulte que ces surfaces engendrent un système linéaire dont fait partie la surface F elle-même (qu'il faut évidemment défalquer).

On en conclut que sur la surface Φ, les courbes tricanoniques sont découpées par des surfaces du système linéaire déterminé précisément par la surface Φ. D'une manière précise, les surfaces triadjointes à Φ sont des surfaces du système linéaire déterminé par Φ et distinctes de cette surface.

Une surface triadjointe à Φ doit se comporter en A_1 comme si elle passait trois fois par ce point et trois fois par la droite double de Φ infiniment voisine de A_1. Elle doit avoir un comportement analogue en A_2, A_3. Il en résulte que les termes qui, dans l'équation de Φ ont pour coefficients a_{11}, a_{12}, a_{13} doivent manquer, dans l'équation d'une surface triadjointe.

Ces termes supprimés, il reste le système linéaire

$$\begin{gathered} X_0X_1X_2X_3(\lambda_{21}X_1X_2 + \lambda_{22}X_2X_3 + \lambda_{23}X_3X_1) \\ + X_0^2X_1X_2X_3(\lambda_{31}X_1 + \lambda_{32}X_2 + \lambda_{33}X_3) \\ + \lambda_1(X_1X_2X_3)^2 + \lambda_2X_0^3X_1X_2X_3 + \lambda_3X_0^6 = 0. \end{gathered}$$

Le point A_1 est quadruple pour cette surface, donc, pour que ce soit une triadjointe, le cône tangent en A_1 doit contenir en facteur X_2^2. Cela exige que l'on ait $\lambda_{23} = 0$, $\lambda_{31} = 0$.

De même, le cône tangent en A_2 doit contenir X_3^2 en facteur et le cône tangent en A_3, X_1^2 en facteur. On a donc $\lambda_{21} = 0$, $\lambda_{32} = 0$, $\lambda_{22} = 0$, $\lambda_{33} = 0$. Il en résulte que les triadjointes à Φ sont les surfaces

$$\lambda_1(X_1X_2X_3)^2 + \lambda_0X_0^3X_1X_2X_3 + \lambda_3X_0^6 = 0.$$

Le système tricanonique de Φ est donc $|2\gamma|$ et on a $P_3 = 3$.

8. Le système 4 — canonique est

$$|2\gamma_0 + 2\gamma|$$

et on a donc $P_4 = 3$.

Le système 5 — canonique est

$$|4\gamma_0 + 2\gamma| = |\gamma_0 + 3\gamma|$$

et par suite $P_5 = 4$.

Le système 6 — canonique est

$$|4\gamma|$$

et on a $P_6 = 5$.

D'une manière générale, le système $3i$ — canonique est

$$|2i\gamma|$$

et on a $P_{3i} = 2i + 1$. Le système $(3i + 1)$ — canonique est

$$|2\gamma_0 + 2i\gamma|$$

et on a également $P_{3i+1} = 2i + 1$. Enfin le système $(3i + 2)$ — canonique est

$$|\gamma_0 + (2i + 1)\gamma|$$

et par conséquent, on a $P_{3i+2} = 2i + 2$.

Liège, le 10 février 1952.