Bulletin de la Classe des sciences

Sur quelques involutions rationnelles appartenant à une surface algébrique (deuxième note)

Lucien Godeaux

Résumé
On démontre l'existence, sur une surface du septième ordre (Pa = Pg = 20) d'une involution rationnelle cyclique ayant quatre points unis.

Sur quelques involutions rationnelles appartenant à une surface algébrique,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(Seconde note).

Résumé. — On démontre l'existence, sur une surface du septième ordre ($p_a = p_g = 20$) d'une involution rationnelle cyclique ayant quatre points unis.

Dans cette seconde note ([1]), nous démontrons le théorème suivant :

La surface du septième ordre

$$a_1x_1^6x_2 + a_2x_2^6x_3 + a_3x_3^6x_4 + a_4x_4^6x_1 = 0$$

est transformée en soi par l'homographie de période 37

$$\frac{x_1'}{x_1} = \frac{x_2'}{\epsilon x_2} = \frac{x_3'}{\epsilon^{32}x_3} = \frac{x_4'}{\epsilon^{31}x_4},$$

où ϵ est une racine primitive de l'unité d'ordre 37. Cette homographie détermine, sur la surface, une involution d'ordre 37 possédant quatre point unis. *Cette involution est rationnelle.*

Une surface Φ, image de l'involution, possède quatre points de diramation qui sont des points multiples d'ordre sept. En un de ces points, le cône tangent à la surface se scinde en un cône rationnel d'ordre cinq et en un cône du second ordre rencontrant le précédent suivant une seule droite. Sur cette droite, la surface possède un point double biplanaire infiniment voisin du point multiple.

Sur la surface F donnée, les quatre points unis de l'involution

([1]) La première note est parue dans le Bulletin de mars, pp. 242-250.

appartiennent à la première catégorie, suivant la terminologie que nous avons utilisée dans notre *mémoire sur les surfaces multiples*, en cours d'impression dans les Mémoires in-8° de l'Académie.

On vérifie d'ailleurs que la surface Φ possède un faisceau linéaire de courbes rationnelle et est bien rationnelle.

1. Considérons la surface F d'équation

$$a_1x_1^6x_2 + a_2x_2^6x_3 + a_3x_3^6x_4 + a_4x_4^6x_1 = 0,$$

d'ordre sept, passant par les droites

$$x_1 = 0, x_3 = 0 \quad \text{et} \quad x_2 = 0, x_4 = 0.$$

La surface F est transformée en soi par l'homographie

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} x_1 & \epsilon x_2 & \epsilon^{32}x_3 & \epsilon^{31}x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

où ϵ est une racine primitive d'ordre 37 de l'unité.

Cette homographie H détermine sur F une involution I, d'ordre 37, possédant quatre points unis : les sommets O_1, O_2, O_3, O_4 du tétraèdre de référence.

Désignons par Φ une surface normale, image de l'involution, sur laquelle les points de diramation sont des points isolés. Nous désignerons par Γ_0 les sections hyperplanes de Φ, par C_0 les courbes qui leur correspondent sur F. Le système $|C_0|$ est en général incomplet et appartient à l'involution I ; il est privé de points-base.

2. Les sommets du tétraèdre de référence sont simples pour la surface. Au point O_1, le plan tangent à la surface est $x_2 = 0$. Dans ce plan, H détermine une homographie non homologique

$$\begin{pmatrix} x_1 & \epsilon^{32}x_3 & \epsilon^{31}x_4 \\ x_1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 & \eta x_2 & \eta^{16}x_4 \\ x_1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

en posant $\eta = \epsilon^{32}$, ou sous la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 & \zeta^7 x_3 & \zeta x_4 \\ x_1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

en posant $\zeta = \epsilon^{31}$.

Le point uni O_1 de I est donc caractérisé par les nombres $\alpha = 7$, $\beta = 16$.

Observons que les points unis O_2, O_3, O_4 sont caractérisés par les mêmes nombres, comme il est aisé de le vérifier. Il suffira donc d'étudier le point O_1.

3. Pour déterminer la structure du point uni O_1 et celle du point de diramation correspondant O'_1 sur la surface Φ, nous devons chercher les solutions en nombres entiers positifs, des congruences

$$\lambda + 7\mu \equiv 0, \qquad \mu + 10\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 37).$$

La solution donnant la plus petite valeur de $\lambda + \mu$ est

$$\lambda_1 = 2, \qquad \mu_1 = 5.$$

Posons

$$p = (2h+1)\lambda_1\mu_1 + \lambda_1 + \mu_1,$$
$$\alpha = (2h+1)\lambda_1 + 1, \qquad \beta = (2h+1)\mu_1 + 1.$$

Nous en déduisons $h = 1$ et par conséquent (¹), le point O'_1 est multiple d'ordre sept pour la surface Φ et possède, dans son domaine du premier ordre, un point double biplanaire ordinaire. Nous allons d'ailleurs retrouver directement ce résultat.

Appelons C'_0 les courbes C_0 passant par O_1. Ces courbes ont en ce point la multiplicité sept et ont deux tangentes confondues avec O_1O_3 et cinq avec O_1O_4. Elles passent deux fois par 15 points (3,1), (3,2), ..., (3,15) infiniment voisins successifs de O_1, le premier étant sur O_1O_3, et cinq fois par six points (4,1), (4,2), ..., (4,6) infiniment voisins successifs de O_1, le premier étant sur O_1O_4. La structure du point O_1 est donc caractérisée par le schéma

(¹) Annales Scient. de l'École Normale Sup., 1938.

$$\begin{array}{ll} & O_1^7,\ (4,1)^5,\ (4,2)^3,\ \ldots,\ (4,6)^5. \\ (3,1)^2, & \\ (3,2)^2, & \\ \vdots & \\ (3,15)^2. & \end{array}$$

Les points (3,1), ..., (3,14) sont unis de seconde espèce pour I, de même que les points (4,1), ..., (4,5) ; les points (3,15) et (4,6) sont unis de première espèce. Si l'on projette Φ de O, sur un hyperplan de l'espace ambiant, on obtient une surface Φ_1 dont les sections hyperplanes Γ'_0 correspondent aux courbes C'_0. Aux domaines des points (3, 15), (4,6) correspondent sur Φ des courbes rationnelles σ_1 d'ordre deux et σ_2 d'ordre cinq. Le cône tangent à Φ en O_1 s'obtient en projetant σ_1 et σ_2 de O_1.

4. On a

$$\lambda_2 = 9,\ \mu_2 = 4\,; \qquad \lambda_3 = 4,\ \mu_3 = 10.$$

Appelons C''_0 les courbes C'_0 ayant la multiplicité $\lambda_2 + \mu_2 = 13$ en O_1 et C'''_0 les courbes C''_0 ayant la multiplicité $\lambda_3 + \mu_3 = 14$ en O_1.

Les courbes C''_0 passent quatre fois par les points (4,1), ..., (4,6) et elles ne peuvent plus passer deux fois par le point (3,15), la somme des multiplicités de ces courbes en O_1, (3,1), ..., (3,15) devant être égale à 37. On en conclut qu'aux courbes C''_0 correspondent sur Φ_1 les sections Γ''_0 par les hyperplans passant par un point A'_1 commun aux courbes σ_1, σ_2.

Si le point A'_1, qui est au plus double pour Φ_1, était équivalent à une courbe irréductible, les courbes C''_0 passeraient neuf fois par le point (3,1), deux fois par (3,2), une fois par les points (3,3),..., (3,10) et une fois par une suite de sept points (3,2,1), ..., (3,2,7) infiniment voisins successifs de (3,2). Le domaine du point (3,2,7), qui est uni de première espèce pour I, aurait pour homologue sur Φ_1 le domaine du point A'_1 et celui-ci serait simple pour la surface. Le point A'_1 devrait absorber 8×37 points d'intersection de deux courbes C''_0, alors qu'il en absorbe 10×37. On en conclut que A'_1 est double biplanaire pour la surface Φ_1.

Projetons Φ_1 de A'_1 sur un hyperplan de l'espace ambiant, nous obtenons une surface Φ_2 sur laquelle à σ_1 correspond une droite σ_1, à σ_2 une courbe σ_2 d'ordre quatre et au domaine du point A_1', deux droites ρ_1, ρ_2 s'appuyant la première sur σ_1, la seconde sur σ_2 et se rencontrant en un point.

Les courbes C_0''' ne peuvent plus passer que trois fois par le point (4,6) et par conséquent il leur correspond sur Φ_2 des courbes Γ_0''' découpées par les hyperplans passant par un point A_2' de σ_2.

Le schéma du comportement des courbes C_0''' en O_1 est

$$\begin{array}{rrllll}
 & O_1^{14}, & (4,1)^8, & (4,2)^3, & \dots, & (4,6)^3 \\
 & (3,1)^4, & (4,1,1)^2, & (4,1,1,1)^2 & & (4,1,1,2)^1 \\
 & (3,2)^4, & & & & (4,1,1,2,1)^1. \\
(3,3,1)^1, & (3,3)^3, & & & & \\
(3,3,1,1)^1. & (3,4)^1, & & & & \\
 & \vdots & & & & \\
 & (3,15)^1. & & & &
\end{array}$$

Le point uni de première espèce (3,3,1,1) a pour homologue la droite ρ_1 et le point A_2' est le point commun à ρ_2 et à σ_2. Le domaine du point uni de première espèce (4,1,1,2,1) correspond au domaine du point A_2' sur Φ_1, point qui est simple pour la surface.

Il est facile de voir que le comportement des courbes C_0'' au point A a pour schéma

$$\begin{array}{rrl}
 & O_1^{13}, & (4,1)^4, \dots, (4,6)^4. \\
(3,1,4)^1, \dots, (3,1,1)^1, & (3,1)^5, & \\
 & (3,2)^4, & \\
(3,3,1)^1, & (3,3)^3, & \\
(3,3,1,1)^1. & (3,4)^1, & \\
 & \vdots & \\
 & (3,15)^1. &
\end{array}$$

Le domaine du point uni de première espèce (3,1,4) a pour homologue sur Φ_0, la droite ρ_2.

5. Bien que cela ne soit pas nécessaire pour notre objet, nous indiquerons ici quelques résultats sur les courbes $C_0^{(4)}$, $C_0^{(5)}$, ... Rappelons que nous indiquons par $C_0^{(i)}$ les courbes C_0 ayant la multiplicité $\lambda_i + \mu_i$ au point O_1, par $\Gamma_0^{(i)}$ les courbes qui leur correspondent sur la surface Φ, par Φ_i la surface, projection de Φ, qui a les courbes $\Gamma_0^{(i)}$ comme sections hyperplanes.

Nous indiquerons les points unis de première espèce qui appartiennent aux courbes $C_0^{(i)}$, avec leurs multiplicités.

$C_0^{(4)}$, $\lambda_4 = 3$, $\mu_4 = 16$.

$$(3,1,4)^3,\ (3,15)^1,\ (4,6)^3.$$

Les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ sont découpées sur Φ_2 par les hyperplans contenant la droite ρ_2.

$C_0^{(5)}$, $\lambda_5 = 11$, $\mu_5 = 9$.

$$(3,1,4)^2,\ (3,15)^1,\ (4,1,1,2,1)^1,\ (4,6)^2.$$

Sur la surface Φ_4, σ_1 est une droite, ρ_2 une cubique gauche rencontrant σ_1 en un point équivalent à ρ_1, σ_2 est une cubique rencontrant ρ_2 en un point A'_4.

Les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ sont découpées sur Φ_4 par les hyperplans passant par le point A'_4.

$C_0^{(6)}$, $\lambda_6 = 6$, $\mu_6 = 15$

$$(3,1,4)^1,\ (3,15)^1,\ (4,1,3,3)^1,\ (4,6)^2.$$

Sur la surface Φ_4, les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ sont découpées par les hyperplans touchant en A'_4 la cubique gauche ρ_2.

$C_0^{(7)}$, $\lambda_7 = 1$, $\mu_7 = 21$.

$$(3,15)^1,\ (4,1,6,2)^1,\ (4,6)^2.$$

Les courbes $\Gamma_0^{(7)}$ sont découpées sur Φ_4 par les hyperplans osculant en A'_4 la cubique gauche ρ_2.

$C_0^{(8)}$, $\lambda_8 = 23$, $\mu_8 = 2$.

$$(3,1,4)^4,\ (3,3,1,1)^1,\ (4,6)^2.$$

Les courbes $\Gamma_0^{(8)}$ sont découpées sur Φ_4 par les hyperplans contenant la cubique gauche ρ_2.

Sur la surface Φ_8, on a une droite ρ_1, une quartique gauche ρ_2 rencontrant ρ_1 en un point et une conique σ_2 coupant ρ_2 en un point A'_8.

$C_0^{(9)}$, $\lambda_9 = 18$, $\mu_9 = 8$.

$$(3,1,4)^3,\ (3,3,1,1)^1,\ (4,1,2,1)^1,\ (4,6)^1.$$

Les courbes $\Gamma_0^{(9)}$ sont découpées sur Φ_8 par les hyperplans passant par A'_8.

$C_0^{(10)}$, $\lambda_{10} = 13$, $\mu_{10} = 14$.

$$(3,1,4)^2,\ (3,3,1,1)^1,\ (4,1,3,3)^1,\ (4,6)^1.$$

Sur Φ_8, les courbes $\Gamma_0^{(10)}$ sont découpées par les hyperplans touchant la quartique ρ_2 en A'_3.

$C_0^{(11)}$, $\lambda_{11} = 18$, $\mu_{11} = 20$.

$$(3,1,4)^1,\ (3,3,1,1)^1,\ (4,1,6,2)^1,\ (4,6)^1.$$

Les courbes $\Gamma_0^{(11)}$ sont découpées sur Φ_8 par les hyperplans osculant ρ_2 en A'_8.

$C_0^{(12)}$, $\lambda_{12} = 3$, $\mu_{12} = 26$.

$$(3,3,1,1)^1,\ (4,1,12,1)^1,\ (4,6)^1.$$

Les courbes $\Gamma_0^{(12)}$ sont découpées sur Φ_1 par les hyperplans ayant un contact du troisième ordre avec ρ_2 en A'_8.

$C_0^{(13)}$, $\lambda_{13} = 30$, $\mu_{13} = 1$.

$$(3,1,4)^6,\ (4,6)^1.$$

Les courbes $\Gamma_0^{(13)}$ sont découpées sur Φ_8 par les hyperplans contenant la courbe ρ_2.

Sur la surface Φ_{13} se trouvent la courbe ρ_2, du sixième ordre et la droite σ_2 coupant ρ_2 en un point A'_{13}.

$C_0^{(14)}$, $\lambda_{14} = 25$, $\mu_{14} = 7$.

$$(3,1,4)^5,\ (4,1,1,2,1)^1.$$

Sur Φ_{13}, les courbes $\Gamma_0^{(14)}$ sont découpées par les hyperplans passant par A'_{13}.

$C_0^{(15)}$, $\lambda_{15} = 20$, $\mu_{15} = 13$.

$$(3,1,4)^4,\ (4,1,3,3)^1.$$

$C_0^{(16)}$, $\lambda_{16} = 15$, $\mu_{16} = 14$.

$$(3,1,4)^3,\ (4,1,6,2)^1.$$

$C_0^{(17)}$, $\lambda_{17} = 10$, $\mu_{17} = 25$.

$$(3,1,4)^2,\ (4,1,12,1)^1.$$

$C_0^{(18)}$, $\lambda_{18} = 5$, $\mu_{18} = 31$.

$$(3,1,4)^1,\ (4,1,30)^1.$$

Sur Φ_{13}, les courbes $\Gamma_0^{(15)}$, $\Gamma_0^{(16)}$, $\Gamma_0^{(17)}$, $\Gamma_0^{(18)}$ sont respectivement découpées par les hyperplans ayant un contact d'ordre 1, 2, 3, 4 avec ρ_2 en A'_{13}.

Les courbes $C_0^{(19)}$ ont un point multiple d'ordre 37 à tangentes variables O_1.

6. Sur la surface Φ, nous avons les égalités fonctionnelles

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &\equiv \Gamma_0' + \sigma_1 + \rho_1 + \rho_2 + \sigma_2,\\
\Gamma_0 &\equiv \Gamma_0'' + \sigma_1 + 2(\rho_1 + \rho_2) + \sigma_2,\\
\Gamma_0 &\equiv \Gamma_0^{(4)} + \sigma_1 + 2\rho_1 + 3\rho_2 + \sigma_2,\\
\Gamma_0 &\equiv \Gamma_0^{(8)} + \sigma_1 + 3\rho_1 + 4\rho_2 + \sigma_2,\\
\Gamma_0 &\equiv \Gamma_0^{(13)} + \sigma_1 + 3\rho_1 + 5\rho_2 + \sigma_2.
\end{aligned}$$

Les courbes rationnelles σ_1, ρ_1, ρ_2, σ_2 ont respectivement les degrés virtuels -3, -2, -2, -6.

7. Les courbes canoniques de Φ, si elles existent, doivent rencontrer la courbe σ_1 en un point et la courbe σ_2 en quatre points. Par conséquent leurs transformées sur F, que nous désignerons par L_0, doivent passer une fois par le point (3,15) et quatre fois par le point (4,6) ; ces courbes ont donc en O_1 un comportement dont le schéma est

$$\begin{array}{ll}
 & O_1^5,\ (4,1)^4,\ \ldots,\ (4,6)^4.\\
(3,1)^1, & \\
\vdots & \\
(3,15)^1. &
\end{array}$$

La surface F étant du septième ordre, les courbes L_0 sont découpées par des surfaces cubiques. Une telle surface doit passer par O_1 et toucher en ce point le plan $x_2 = 0$. Comme elle a un comportement analogue en O_2, O_3, O_4, son équation est de la forme

$$\left.\begin{aligned} h_1x_1^2x_2 + h_2x_2^2x_3 + h_3x_3^2x_4 + h_4x_4^2x_1 \\ + l_1x_2x_3x_4 + l_2x_3x_4x_1 + l_3x_4x_1x_2 + l_4x_1x_2x_3 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Cette surface doit être transformée en elle-même par H, donc le premier membre de son équation doit se retrouver multiplié par une certaine puissance de ϵ. On voit facilement qu'il en est pas ainsi, mais nous allons voir, par une autre voie, que tous les coefficients sont nuls.

8. La transformation quadratique

$$\theta_4 = \begin{pmatrix} y_1 & y_2y_4 & y_3y_4 & y_1y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

fait correspondre au point infiniment voisin de O_1 sur la droite O_1O_4, le point $y_2 = y_3 = y_4 = 0$. Celui-ci est donc l'homologue du point (4,1), qui doit être quadruple pour les courbes L_0.

A la surface F, θ_4 fait correspondre la surface F',

$$a_1y_1^{12}y_2 + a_2y_2^6y_3y_4^6 + a_3y_1y_3^2y_4^6 + a_4y_1^8y_4^5 = 0,$$

et à la surface (1),

$$\left.\begin{aligned} h_1y_1^4y_2 + h_2y_2^2y_3y_4^2 + h_3y_1y_3^2y_4^2 + h_4y_1^4y_4 \\ + l_1y_1y_2y_3y_4^2 + l_2y_1^3y_3y_4 + l_3y_1^3y_2y_4 + l_4y_1^2y_2y_3y_4 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Au point (4,2), θ_4 fait correspondre le point infiniment voisin de $(y_2 = y_3 = y_4) = 0$ sur la droite $y_2 = y_3 = 0$ et ce point doit être quadruple pour l'intersection des surfaces F' et (2). Cela exige que le plan tangent en (1,0,0,0) à la surface (2) passe par la droite $y_2 = y_3 = 0$ et par conséquent, on a $h_4 = 0$. Mais alors, comme on peut faire le même raisonnement pour les points O_2, O_3, O_4, on a nécessairement $h_1 = 0$, $h_2 = 0$, $h_3 = 0$ et l'équation (2) se réduit à

$$l_1y_2y_3y_4 + l_2y_1^2y_3 + l_3y_1^2y_2 + l_4y_1y_2y_3 = 0. \qquad (2')$$

La courbe intersection des surface F′ et (2′) a un point simple en O_1 et doit avoir un point quadruple, donc on a $l_2 = l_3 = 0$, ensuite $l_4 = 0$ et $l_1 = 0$.

Les courbes canoniques de la surface Φ n'existent pas.

9. On peut de même démontrer que les courbes bicanoniques de la surface Φ ne peuvent exister.

S'il existe une telle courbe, il lui correspond sur F une courbe découpée par une surface du sixième ordre, ayant en O_1 la multiplicité dix, en (4,1), ..., (4,6) la multiplicité huit et en (3,1), ..., (3,15) la multiplicité deux.

Soit

$$\psi_6(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = 0$$

l'équation d'une biadjointe du sixième ordre. Elle passe par O_1, O_2, O_3, O_4 en y touchant respectivement les plans $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_1 = 0$.

Les points (3,1), (4,1) étant simples pour F, doivent être multiples d'ordres 2, 8 pour l'intersection avec $\psi_6 = 0$. Par conséquent, lorsque l'on fait $x_2 = 0$ dans cette équation, on doit pouvoir mettre en facteur $x_3^8 x_4^2$. Il en résulte que tous les termes de l'équation contenant x_3, x_4 doivent contenir x_2.

De même, en considérant O_2, les termes de l'équation $\psi_6 = 0$ contenant x_1 ou x_4 doivent contenir x_3, et ainsi de suite. On en conclut que l'on a

$$\psi_6 \equiv x_1 x_2 x_3 x_4 \psi_2 = 0,$$

où ψ_2 est l'équation d'une quadrique. Celle-ci doit passer six fois par le point (4,1) et avoir un comportement analogue en O_1, O_3, O_4. On en déduit que tous ses coefficients sont nuls et que par suite Φ est dépourvue de courbe bicanonique.

10. La surface Φ, d'après ce qu'on vient de voir, a les genres

$$p_g = 0, \quad P_2 = 0.$$

La surface F est régulière, donc il en est de même de la surface Φ et on a

$$p_a = p_g = 0.$$

La surface Φ ayant les genres $p_a = P_2 = 0$, est rationnelle d'après le théorème de M. Castelnuovo.

11. On peut du reste voir directement que Φ est rationnelle en montrant qu'elle contient un faisceau rationnel de courbes rationnelles.

Les quadriques

$$x_1 x_3 + \lambda x_2 x_4 = 0$$

sont transformées en elles-mêmes par H. Elles découpent sur F des courbes γ auxquelles correspondent sur Φ des courbes γ' formant un faisceau.

Pour calculer le genre des courbes γ, nous pouvons supposer $\lambda = -1$ et en projetant la courbe γ de O_4 sur le plan $x_4 = 0$, on obtient la courbe

$$a_1 x_1^6 x_2^7 + a_2 x_2^{12} x_3 + a_3 x_1 x_3^7 x_2^5 + a_4 x_1^7 x_3^6 = 0.$$

Il est facile de voir que cette courbe ne possède que deux points multiples : les points O_1, O_3, multiples d'ordre six. Il en résulte que les courbes γ sont de genre 36.

D'autre part, les courbes γ passent simplement par le point (4,6) et par les points analogues du domaine de O_2, O_3, O_4.

La formule de Zeuthen donne, en appelant x le genre des courbes γ',

$$2 . 37(x - 1) + 4 . 36 = 2(36 - 1).$$

On en déduit $x = 0$ et les courbes γ' sont rationnelles.

La surface Φ possédant un faisceau de courbes rationnelles, est rationnelle.

Le 12 mars 1952.